Analysis II für M, LaG, Ph

12. Tutorium

Lösungsvorschlag

T1 Riemann-Integrierbarkeit

i) Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{q_1+q_2} & x = \frac{p_1}{q_1}, y = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dabei sind p_1 und q_1 sowie p_2 und q_2 teilerfremd. Untersuche die Funktion g auf Riemann-Integrierbarkeit.

Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion. Man zeige nun:

ii) Die Funktion $\operatorname{sgn} f$ ist nicht notwendigerweise Riemann-integrierbar.

iii) Ist die Menge der Nullstellen von f Jordan-messbar, so ist $\operatorname{sgn} f$ Riemann-integrierbar.

i) In allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}$ mit x oder y irrational ist die Funktion g stetig. (Warum?) Allerdings ist g in allen rationalen Punkten (außer der Null) unstetig. Die Menge der Unstetigkeitspunkte von g ist also $M_g = \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}$. Nach dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium (s. Skript Satz 5.8) ist g auf jedem Rechteck und nach Satz 6.2 auf jeder Jordan-messbaren Menge Riemann-integrierbar.

ii) Betrachten wir die Funktion g aus Aufgabenteil i). Für diese gilt $\operatorname{sgn} g = \chi_{\mathbb{Q}^2\setminus\{0\}}$. Die Funktion $\operatorname{sgn} g$ ist also in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ unstetig und daher auf keiner Jordan-messbaren Menge Riemann-integrierbar.

iii) Wegen $\operatorname{sgn} f = \chi_{\{f>0\}} - \chi_{\{f<0\}}$, genügt es die Riemann-Integrierbarkeit von $\chi_{\{f>0\}}$ zu zeigen (für $\chi_{\{f<0\}}$ geht man ganz analog vor). Dabei ist die Menge $\{f > 0\}$ definiert durch $\{f > 0\} := \{x|f(x) > 0\}$.
Um die Riemann-Integrierbarkeit von $\chi_{\{f>0\}}$ nachzuweisen genügt es nach Satz 5.8 und Satz 6.2 zu zeigen, dass die Menge der Unstetigkeitsstellen von $\chi_{\{f>0\}}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Sei also $\chi_{\{f>0\}}$ im Punkt x unstetig, so können zwei Fälle für die Funktion f auftreten:
1.Fall: Die Funktion f ist an der Stelle x unstetig. Die Menge der Unstetigkeitsstellen M_f von f ist aber eine Lebesgue-Nullmenge, da f Riemann-integrierbar ist.
2.Fall: Die Funktion f ist an der Stelle x eben nicht unstetig. Dann hat f aber in x eine Nullstelle. Da $\chi_{\{f>0\}}$ in x unstetig ist, gibt es eine gegen x konvergierende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\chi_{\{f>0\}}(x_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Punkt x liegt also auf dem Rand der Nullstellenmenge von f. Da diese nach Vorrausetzung Jordan-messbar ist, ist der Rand nach Lemma 6.1 eine Lebesgue-Nullmenge.
Fassen wir nun beide Fälle zusammen, so erhalten wir zwei Lebesgue-Nullmengen. Da die Vereinigung von Lebesgue-Nullmenge weiterhin eine Lebesgue-Nullmenge ist (s. Skript Lemma 5.7 (2)), ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von $\chi_{\{f>0\}}$ eine Lebesgue-Nullmenge. Damit ist gezeigt, dass f Riemann-integrierbar ist.

T2 Zur Cantor-Menge

Im 3. Tutorium hatten wir die *Cantor-Menge*

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \;\middle|\; a_i \in \{0,2\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \right\}$$

eingeführt. Zeige nun:

i) Die Cantor-Menge C ist eine Lebesgue-Nullmenge.
ii) Die Cantor-Menge C ist eine Jordan-Nullmenge.

i) Im 3. Tutorium hatten wir die Cantor-Menge C als Schnitt der Mengen

$$C_k := \bigcup_{(a_1,\dots,a_k)\in\{0,2\}^k} \Big[\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^k}\Big]$$

konstruiert. Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist die Menge C_k eine Überdeckung der Cantor-Menge $C \subseteq C_k$ von 2^k abgeschlossenen Intervallen (1-dim. Rechtecken) mit Intervallänge $\frac{1}{3^k}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$|C_{k_\varepsilon}| = \left(\frac{2}{3}\right)^{k_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass die Cantor Menge C eine Lebesgue-Nullmenge (sogar Jordan-Nullmenge) ist.

ii) In Aufgabenteil i) wurde bereits gezeigt, dass C eine Jordan-Nullmenge ist. Falls man durch eine andere Konstruktion der überdeckenden Mengen erstmal nur zeigen konnte, dass C eine Lebesgue-Nullmenge ist, folgt mit Lemma 5.7 (4), dass C sogar eine Jordan-Nullmenge ist. Die Kompaktheit von C wurde bereits im 3. Tutorium gezeigt.

T3 Substitutionsregel

i) Sei die Funktion $f : B \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|^{-\alpha}$, mit $B := \overline{B_1(0)} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, und $\alpha > 0$ gegeben. Wir definieren die uneigentlichen Integrale

$$\int_B f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_\varepsilon} f(x)dx, \tag{1}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{B}} f(x)dx := \lim_{R\to\infty} \int_{B_R} f(x)dx, \tag{2}$$

wobei $B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^2 | \varepsilon \le |x| \le 1\}$ und $B_R := \{x \in \mathbb{R}^2 | 1 < |x| \le R\}$.
Bestimme alle $\alpha > 0$, so dass obiger Grenzwert (1) bzw. (2) existiert.

ii) Man zeige, für alle $\alpha, \beta < 2$ mit $\alpha + \beta > 2$ existiert eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dy}{|y|^\alpha |x-y|^\beta} = \frac{c}{|x|^{\alpha+\beta-2}}.$$

iii) Das Simplex im $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, mit den Eckpunkten $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$S := \left\{ \sum_{i=1}^n t_i(a_i - a_0) \;\Big|\; \sum_{i=1}^n t_i \le 1 \text{ und } 0 \le t_i \le 1 \text{ für alle } 1 \le i \le n \right\}.$$

Man zeige: Das Volumen der Menge S ist

$$\frac{1}{n!}\Big| \det(a_1 - a_0, a_2 - a_0, ..., a_n - a_0) \Big|.$$

i) Mit der Substitutionsregel erhalten wir mit Beispiel 7.6 (s. Skript Seite 7-48):

$$\int_{B_\varepsilon} f(x)dx = \int_\varepsilon^1 \left(2\pi \int_{[0,\pi]^{n-2}} \sin^{n-2}\theta_1 \cdot \sin^{n-3}\theta_2 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{n-2} d(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-2})\right) r^{n-1-\alpha}dr.$$

Dabei existiert das innere Integral (stetiger Integrand auf Jordan-messbarer Menge) und ist unabhängig von α und ε; wir schreiben diese Konstante also kurz

$$c_n := 2\pi \int_{[0,\pi]^{n-2}} \sin^{n-2}\theta_1 \cdot \sin^{n-3}\theta_2 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{n-2} d(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-2}).$$

Die Konstante c_n ist die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel. Wir haben nun also:

$$\begin{aligned}\int_{B_\varepsilon} f(x)dx &= c_n \int_\varepsilon^1 r^{n-1-\alpha}dr = \frac{c_n}{n-\alpha} r^{n-\alpha}\Big|_\varepsilon^1 \\ &= \frac{c_n}{n-\alpha}\left(1-\varepsilon^{n-\alpha}\right) \to \frac{c_n}{n-\alpha}\end{aligned}$$

für $\varepsilon \to +0$, falls $\alpha < n$ (Spezialfall $\alpha = n$ separat betrachten). Man erhält also

$$\int_B f(x)dx = \begin{cases} \frac{c_n}{n-\alpha} & \alpha < n \\ \infty & \alpha \geq n \end{cases}.$$

Nun zum uneigentlichen Integral (2): Analog zum ersten Teil erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{B_R} f(x)dx &= c_n \int_1^R r^{n-1-\alpha}dr = \frac{c_n}{n-\alpha} r^{n-\alpha}\Big|_1^R \\ &= \frac{c_n}{n-\alpha}\left(R^{n-\alpha}-1\right) \to \frac{c_n}{\alpha-n}\end{aligned}$$

für $R \to +\infty$, falls $\alpha > n$ (Spezialfall $\alpha = n$ separat betrachten). Man erhält also

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{B}} f(x)dx = \begin{cases} \frac{c_n}{\alpha-n} & \alpha > n \\ \infty & \alpha \leq n \end{cases}.$$

ii) Seien für $a \in \mathbb{R}^2$, $\epsilon > 0$ und $r > 0$ die Mengen $A_{\epsilon,r}(a) := \{b \in \mathbb{R}^2 | \epsilon < |b-a| < r\}$ und $B_r(a) := \{b \in \mathbb{R}^2 || b-a| < r\}$ definiert. Im Sinne von Aufgabenteil i) lässt sich das uneigentliche Integral mit $I_1(R) := B_R(0) \setminus (B_{\frac{|x|}{2}}(0) \cup B_{\frac{|x|}{2}}(x)), I_2(\varepsilon_1) := A_{\varepsilon_1,\frac{|x|}{2}}(0), I_3(\varepsilon_2) := A_{\varepsilon_2,\frac{|x|}{2}}(x)$ durch

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dy}{|y|^\alpha|x-y|^\beta} &:= \lim_{R\to\infty} \int_{I_1(R)} \frac{dy}{|y|^\alpha|x-y|^\beta} + \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_{I_2(\varepsilon_1)} \frac{dy}{|y|^\alpha|x-y|^\beta} \\ &+ \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_{I_3(\varepsilon_2)} \frac{dy}{|y|^\alpha|x-y|^\beta}\end{aligned}$$

definieren. Zunächst substituieren wir mit $y' := \frac{y}{|x|}$ und erhalten mit $I_1'(R) := B_R(0) \setminus (B_{\frac{1}{2}}(0) \cup B_{\frac{1}{2}}(\frac{x}{|x|})), I_2'(\varepsilon_1) := A_{\varepsilon_1,\frac{1}{2}}(0), I_3'(\varepsilon_2) := A_{\varepsilon_2,\frac{1}{2}}(\frac{x}{|x|})$ und $J_1(R) :=$

$B_R(0) \setminus (B_{\frac{1}{2}}(0) \cup B_{\frac{1}{2}}(1))$, $J_2(\varepsilon_1) := A_{\varepsilon_1, \frac{1}{2}}(0)$, $J_3(\varepsilon_2) := A_{\varepsilon_2, \frac{1}{2}}(1)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_{I_1(R)} \frac{dy}{|y|^\alpha |x-y|^\beta} &= \lim_{R\to} \int_{I_1'(R)} \frac{|x|^2 dy'}{|x|^{\alpha+\beta} |y'|^\alpha |\frac{x}{|x|} - y'|^\beta} \\
&= \frac{1}{|x|^{\alpha+\beta-2}} \lim_{R\to} \int_{I_1'(R)} \frac{dy'}{|y'|^\alpha |\frac{x}{|x|} - y'|^\beta} \\
&= \frac{1}{|x|^{\alpha+\beta-2}} \lim_{R\to} \int_{J_1(R)} \frac{dz}{|z|^\alpha |1-z|^\beta}, \qquad \textit{sowie} \\
\lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_{I_2(\varepsilon_1)} \frac{dy}{|y|^\alpha |x-y|^\beta} &= \frac{1}{|x|^{\alpha+\beta-2}} \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_{J_2(\varepsilon_1)} \frac{dz}{|z|^\alpha |1-z|^\beta}, \\
\lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_{I_3(\varepsilon_2)} \frac{dy}{|y|^\alpha |x-y|^\beta} &= \frac{1}{|x|^{\alpha+\beta-2}} \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_{J_3(\varepsilon_2)} \frac{dz}{|z|^\alpha |1-z|^\beta}.
\end{aligned}$$

Wobei wir jeweils für die letzte Gleichung wieder die Substitutionsregel benutzt haben: $y' = Oz$*. Dabei ist* O *eine Drehmatrix (orthogonale lineare Abbildung) um den Winkel* $\phi := \arctan(\frac{x_2}{x_1})$*:*

$$O := \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Es gilt $|Oa| = |a|$ *und* $|\frac{x}{|x|} - Oa| = |O(1-a)| = |1-a|$ *für alle* $a \in \mathbb{R}^2$*.*
Es bleibt nun zu zeigen, dass die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
C_1 &:= \lim_{R\to} \int_{J_1(R)} \frac{dz}{|z|^\alpha |1-z|^\beta}, \\
C_2 &:= \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_{J_2(\varepsilon_1)} \frac{dz}{|z|^\alpha |1-z|^\beta} \quad \textit{und} \\
C_3 &:= \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_{J_3(\varepsilon_2)} \frac{dz}{|z|^\alpha |1-z|^\beta}
\end{aligned}$$

existieren. Wir können mit Aufgabenteil i) wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
C_2 &=: \int_{B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{dz}{|z|^\alpha |1-z|^\beta} \le \int_{B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{dz}{|z|^\alpha |1-\frac{1}{2}|^\beta} \\
&= \frac{1}{2^\beta} \int_{B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{dz}{|z|^\alpha} < \infty \qquad \text{für } \alpha < n, \\
C_3 &=: \int_{B_{\frac{1}{2}}(1)} \frac{dz}{|z|^\alpha |1-z|^\beta} \le \int_{B_{\frac{1}{2}}(1)} \frac{dz}{|\frac{1}{2}|^\alpha |1-z|^\beta} \\
&= \frac{1}{2^\alpha} \int_{B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{dz}{|1-z|^\beta} < \infty \qquad f\ddot{u}r\ \beta < n.
\end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral C_1 *schätzt man ganz analog ab, indem man das Integrationsgebiet* $J_1(R)$ *in zwei disjunkte Teilgebiete zerlegt und entsprechend abschätzt. Nach Aufgabenteil i) erhält man für die Beschränktheit dieses Grenzwertes die Bedingung* $\alpha + \beta > n$*.*
Zusammengefasst haben wir nun also gezeigt, dass es für alle $0 < \alpha, \beta < n$ *mit* $\alpha + \beta > n$ *eine Konstante* $c := C_1 + C_2 + C_3 > 0$ *gibt, so dass*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dy}{|y|^\alpha |x-y|^\beta} = \frac{c}{|x|^{\alpha+\beta-2}}.$$

iii) *Sind die Vektoren $a_1 - a_0, ..., a_n - a_0$ linear abhängig, so ist S eine Jordan-Nullmenge und die angegebene Volumenformel gilt. Seien also die Punkte $a_1 - a_0, ..., a_n - a_0$ linear unabhängig. Die lineare Abbildung $A : \Delta^n \to S$ definiert durch $A := (a_1 - a_0, ..., a_n - a_0)$ bildet das n-dimensionale Standardsimplex*

$$\Delta^n := \{\sum_{i=1}^{n} t_i e_i \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n} t_i \leq 1 \textit{ und } 0 \leq t_i \leq 1 \textit{ für alle } 1 \leq i \leq n\}$$

bijektiv auf S ab. Mit der Substitutionsregel erhalten wir daher:

$$\mathrm{Vol}(S) = \int_S dx = \int_{\Delta^n} |\det(J_A)| dy = \Big|\det\left(a_1 - a_0, a_2 - a_0, ...a_n - a_0\right)\Big| \int_{\Delta^n} dy.$$

Den Wert des Integrals $\int_{\Delta^n} dy$ bestimmen wir per Induktion über die Dimension n. Für $n = 1$ gilt natürlich $\int_{\Delta^1} dy = \int_0^1 dy = 1 = \frac{1}{1!}$. Nun führen wir den Induktionsschritt unter der Vorraussetzung $\int_{\Delta^k} dy = \frac{1}{k!}$ für $k < n$ durch. Mit dem Satz von Cavalieri (s. 12. Übung G2) haben wir:

$$\begin{aligned}\int_{\Delta^n} dy &= \int_0^1 \int_{(1-y_n)\cdot\Delta^{n-1}} d(y_1, ..., y_{n-1}) dy_n \int_0^1 \frac{(1-y_n)^{n-1}}{(n-1)!} dy_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-y_n)^{n-1} dy_n = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n!},\end{aligned}$$

wobei $(1-y_n)\cdot\Delta^{n-1} := \{(1-y_n)\cdot\sum_{i=1}^{n-1} t_i e_i \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n-1} t_i \leq 1 \textit{ und } 0 \leq t_i \leq 1 \textit{ für alle } 1 \leq i \leq n-1\}$ und daher gilt nach 12. Übung G1: $\mathrm{Vol}\left((1-y_n)\cdot\Delta^{n-1}\right) = \frac{(1-y_n)^{n-1}}{(n-1)!}$.