Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Jennifer Prasiswa
Christian Komo
Raphael Schulz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

08.07.2009

Analysis II für M, LaG, Ph

12. Tutorium

T1 Riemann-Integrierbarkeit

i) Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{q_1+q_2} & x = \frac{p_1}{q_1}, y = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dabei sind p_1 und q_1 sowie p_2 und q_2 teilerfremd. Untersuche die Funktion g auf Riemann-Integrierbarkeit.

Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion. Man zeige nun:

ii) Die Funktion $\operatorname{sgn} f$ ist nicht notwendigerweise Riemann-integrierbar.

iii) Ist die Menge der Nullstellen von f Jordan-messbar, so ist $\operatorname{sgn} f$ Riemann-integrierbar.

T2 Zur Cantor-Menge

Im 3. Tutorium hatten wir die *Cantor-Menge*

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \;\middle|\; a_i \in \{0,2\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \right\}$$

eingeführt. Zeige nun:

i) Die Cantor-Menge C ist eine Lebesgue-Nullmenge.

ii) Die Cantor-Menge C ist eine Jordan-Nullmenge.

T3 Substitutionsregel

i) Sei die Funktion $f : B \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|^{-\alpha}$, mit $B := \overline{B_1(0)} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, und $\alpha > 0$ gegeben. Wir definieren die uneigentlichen Integrale

$$\int_B f(x)dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_\varepsilon} f(x)dx, \tag{1}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}} f(x)dx := \lim_{R \to \infty} \int_{B_R} f(x)dx, \tag{2}$$

wobei $B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^2 | \varepsilon \leq |x| \leq 1\}$ und $B_R := \{x \in \mathbb{R}^2 | 1 < |x| \leq R\}$.
Bestimme alle $\alpha > 0$, so dass obiger Grenzwert (1) bzw. (2) existiert.

ii) Man zeige, für alle $\alpha, \beta < 2$ mit $\alpha + \beta > 2$ existiert eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dy}{|y|^\alpha |x-y|^\beta} = \frac{c}{|x|^{\alpha+\beta-2}}.$$

iii) Das Simplex im $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, mit den Eckpunkten $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$S := \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_0) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} t_i \leq 1 \text{ und } 0 \leq t_i \leq 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Man zeige: Das Volumen der Menge S ist

$$\frac{1}{n!}\Big| \det\left(a_1 - a_0, a_2 - a_0, ..., a_n - a_0\right) \Big|.$$