Analysis II für M, LaG, Ph

11. Tutorium
Lösungsvorschlag

T1 Zwischenwertsatz für mehrdimensionale Riemann-Integrale

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompaktes Rechteck und sei $f : R \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $\xi \in R$ mit
$$\int_R f(x)\,dx = \mathrm{Vol}(R) f(\xi).$$

(b) Sei $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompaktes Rechteck und sei $f : R \to \mathbb{R}$ eine auf R Riemann-integrierbare Funktion, die in einem Punkt $\xi \in R$ stetig ist. Sei $(R_j)\,, j \in \mathbb{N}$, eine Folge von kompakten Rechtecken $R_j \subseteq R$, die sich auf ξ in dem folgenden Sinne zusammenziehen soll: Für beliebiges $\epsilon > 0$ existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $j \geq j_0$ die Relation $R_j \subseteq U_\epsilon(\xi)$ erfüllt ist. Dann gilt
$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathrm{Vol}(R_j)} \int_{R_j} f(x)\,dx = f(\xi).$$

Lösung. *Wir zeigen zuerst die Aussage (a). Setze $m := \min_{x\in R} f(x)\,, M := \max_{x\in R} f(x)$. Es gilt*
$$\int_R m\,dx \leq \int_R f(x)\,dx \leq \int_R M\,dx$$
und daraus ergibt sich
$$\mathrm{Vol}(R)m \leq \int_R f(x)\,dx \leq \mathrm{Vol}(R)M.$$
Weiterhin folgt, dass $f(R) \subseteq \mathbb{R}$ als stetiges Bild einer wegzusammenhängenden Menge selbst wieder wegzusammenhängend ist. Aus $\frac{1}{\mathrm{Vol}(R)} \int_R f(x)\,dx \in [m, M]$ folgt somit die Existenz eines $\xi \in R$ mit $f(\xi) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(R)} \int_R f(x)\,dx$. Nun widmen wir uns dem Beweis der Aussage (b). Da f in ξ stetig ist, existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass
$$|\xi - x| < \delta\,, x \in R \Rightarrow |f(\xi) - f(x)| < \epsilon$$
gilt. Aufgrund der Annahme über die Folge (R_j) finden wir ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so dass
$$R_j \subseteq U_\delta(\xi) \quad \forall j \geq j_0$$
gilt. Aufgabe (a) liefert für jedes $j \geq j_0$ ein $\xi_j \in R_j$ mit
$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(R_j)} \int_{R_j} f(x)\,dx = f(\xi_j).$$
Es folgt für $j \geq j_0$
$$\left| \frac{1}{\mathrm{Vol}(R_j)} \int_{R_j} f(x)\,dx - f(\xi) \right| = |f(\xi_j) - f(\xi)| \leq \epsilon.$$

T2 Verallgemeinerung des Satzes von Fubini

Seien $R \subseteq \mathbb{R}^n\,, Q \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakte Rechtecke und sei $f : R \times Q \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion.

(a) Finden Sie ein Beispiel, so dass nicht alle Funktionen f_x mit $x \in R$, wobei

$$f_x(y) = f(x,y)\,, \quad y \in Q$$

Riemann-integrierbar auf Q sind.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{R\times Q} f(x,y)\,d(x,y) = \int_R \left(\underset{Q}{\int_*} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_R \left(\underset{Q}{\int^*} f(x,y)\,dy \right) dx$$

gilt.

Hinweis. Analysieren und modifizieren Sie den Beweis des Satzes von Fubini.

(a) Wir definieren

$$f(x,y) := \begin{cases} 1_{\mathbb{Q}}(y)\,, & x = 1\,, y \in [0,1]\,, \\ 0\,, & x \neq 1\,, y \in [0,1]. \end{cases}$$

Da man für eine beliebige Partition P von $[0,1]$ stets $U_P(f(1,\cdot)) = 0$ und $O_P(f(1,\cdot)) = 1$ erhält, ist die Funktion $y \mapsto f(1,y)$ nicht Riemann-integrierbar auf $[0,1]$. Nach dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium ist f auf $[0,1]^2$ Riemann-integrierbar, da f auf $[0,1]^2$ beschränkt und in jedem Punkt $(x,y) \in [0,1]^2$ mit $x \neq 1$ stetig ist.

(b) Wir betrachten eine beliebige Zerlegung P' von R und eine beliebige Zerlegung P'' von Q. Es gilt

$$\begin{aligned} U_{R\times Q}(P,f) &= \sum_{S\in P} \inf_{(x,y)\in S} f(x,y)\,|S| \\ &= \sum_{S'\in P'} \sum_{S''\in P''} \inf_{(x,y)\in S'\times S''} f(x,y)\,|S'|\,|S''| \\ &= \sum_{S'\in P'} \sum_{S''\in P''} \inf_{x\in S'} (\inf_{y\in S''} f_x(y))\,|S'|\,|S''|. \end{aligned}$$

Da für jedes $S' \in P'$

$$\sum_{S''\in P''} \inf_{x\in S'} (\inf_{y\in S''} f_x(y))\,|S'|\,|S''| \leq \inf_{x\in S'} \sum_{S''\in P''} \inf_{y\in S''} f_x(y)\,|S'|\,|S''|$$

gilt, können wir weiter abschätzen und erhalten

$$\begin{aligned} U_{R\times Q}(P'\times P'',f) &\leq \sum_{S'\in P'} \inf_{x\in S'} \left(\sum_{S''\in P''} \inf_{y\in S''} f_x(y)\,|S''| \right) |S'| \\ &\leq \sum_{S'\in P'} \inf_{x\in S'} \underset{Q}{\int_*} f_x(y)\,dy\,|S'| \\ &= U_R\left(P', \underset{Q}{\int_*} f_\cdot(y)\,dy \right) \\ &\leq O_R\left(P', \underset{Q}{\int_*} f_\cdot(y)\,dy \right) \\ &\leq \ldots \text{(analog wie oben)} \leq O_{R\times Q}(P'\times P'',f). \end{aligned}$$

Da f nach Annahme integrierbar auf $R \times Q$ ist, finden wir Partitionen $\hat{P}$ von R und $\hat{Q}$ von Q, so dass

$$O_{R\times Q}(\hat{P} \times Q, f) - U_{R\times Q}(\hat{P} \times Q, f) \leq \epsilon$$

gilt. Es folgt

$$O_R(\hat{P}, \underset{Q}{\int_*} f_\cdot(y)\,dy) - U_R(\hat{P}, \underset{Q}{\int_*} f_\cdot(y)\,dy) \leq \epsilon.$$

Dies impliziert die Existenz des Integrals

$$\int_R \left(\underset{Q}{\int_*} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Weiterhin erhalten wir, wobei P' Partitionen von R und P'' Partitionen von Q sein sollen:

$$\sup_{P',P''} U_{R\times Q}(P' \times P'', f) \leq \sup_{P'} U_R(P', \underset{Q}{\int_*} f_\cdot(y)\,dy)$$

und

$$\inf_{P'} O_R(P', \underset{Q}{\int_*} f_\cdot(y)\,dy) \leq \inf_{P',P''} O_{R\times Q}(P' \times P'', \underset{Q}{\int_*} f_\cdot(y)\,dy).$$

Daraus erhält man

$$\int_{R\times Q} f(x,y)\,d(x,y) \leq \int_R \left(\underset{Q}{\int_*} f(x,y)\,dy \right) dx \leq \int_{R\times Q} f(x,y)\,d(x,y)$$

und daraus folgt die Behauptung. Die Aussage

$$\int_{R\times Q} f(x,y)\,d(x,y) = \int_R \left(\int_Q^* f(x,y)\,dy \right) dx$$

lässt sich mit ähnlichen Argumenten beweisen.