Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Christian Komo
Jennifer Prasiswa
Raphael Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

17.06.2009

# Analysis II für M, LaG, Ph

## 11. Tutorium

**T1 Zwischenwertsatz für mehrdimensionale Riemann-Integrale**

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompaktes Rechteck und sei $f : R \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $\xi \in R$ mit

$$\int_R f(x)\,dx = \operatorname{Vol}(R) f(\xi).$$

(b) Sei $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompaktes Rechteck und sei $f : R \to \mathbb{R}$ eine auf $R$ Riemann-integrierbare Funktion, die in einem Punkt $\xi \in R$ stetig ist. Sei $(R_j)$, $j \in \mathbb{N}$, eine Folge von kompakten Rechtecken $R_j \subseteq R$, die sich auf $\xi$ in dem folgenden Sinne zusammenziehen soll: Für beliebiges $\epsilon > 0$ existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $j \geq j_0$ die Relation $R_j \subseteq U_\epsilon(\xi)$ erfüllt ist. Dann gilt

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\operatorname{Vol}(R_j)} \int_{R_j} f(x)\,dx = f(\xi).$$

**T2 Verallgemeinerung des Satzes von Fubini**

Seien $R \subseteq \mathbb{R}^n, Q \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakte Rechtecke und sei $f : R \times Q \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion.

(a) Finden Sie ein Beispiel, so dass nicht alle Funktionen $f_x$ mit $x \in R$, wobei

$$f_x(y) = f(x,y)\,, \quad y \in Q$$

Riemann-integrierbar auf $Q$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{R\times Q} f(x,y)\,d(x,y) = \int_R \left( \int_{*Q} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_R \left( \int_Q^* f(x,y)\,dy \right) dx$$

gilt.

**Hinweis.** Analysieren und modifizieren Sie den Beweis des Satzes von Fubini.