Analysis II für M, LaG, Ph

10. Tutorium

Lösungsvorschlag

T1 Ein nicht-rektifizierbarer Weg

Man zeige, dass der (stetige) Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (t, y(t))$, definiert durch

$$y(t) := \begin{cases} t\sin(\frac{1}{t}) & \text{für } t \in (0,1] \\ 0 & \text{für } t = 0, \end{cases}$$

nicht rektifizierbar ist.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen die Zerlegung $Z_n : t_n^{(n)} < t_{n-1}^{(n)} < ... < t_0^{(n)}$ mit $t_i^{(n)} := \left(\frac{2}{1+2i}\right)\frac{1}{\pi} \in [0,1]$, $i = 0, ..., n$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sup_Z s(\gamma, Z) \geq s(\gamma, Z_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left|\gamma(t_{i-1}^{(n)}) - \gamma(t_i^{(n)})\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left|\left(t_{i-1}^{(n)} - t_i^{(n)}, t_{i-1}^{(n)}\sin(1/t_{i-1}^{(n)}) - t_i^{(n)}\sin(1/t_i^{(n)})\right)\right| \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \left|t_{i-1}^{(n)}\sin(1/t_{i-1}^{(n)}) - t_i^{(n)}\sin(1/t_i^{(n)})\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|t_{i-1}^{(n)} + t_i^{(n)}\right| \geq \sum_{i-1}^{n} |t_i^{(n)}| \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+2i} > \frac{1}{\pi}\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i} \to \infty
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Der Weg γ ist also nicht rektifizierbar.

T2 Die Spur als Graph

Es sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, mit $\gamma(t) := (x(t), y(t))$. Die Funktion $\frac{d}{dt}x$ habe auf I keine Nullstelle. Zeige, dass es eine stetig differenzierbare Funktion f auf dem Intervall $J := x(I)$ gibt, deren Graph die Spur von γ ist. Die Ableitung von f an einer Stelle $x_0 \in J$ mit $x_0 = x(t_0)$ ist

$$\frac{d}{dx}f(x_0) = \frac{\frac{d}{dt}y(t_0)}{\frac{d}{dt}x(t_0)}.$$

Aus Stetigkeitsgründen hat $\frac{d}{dt}x$ auf I einheitliches Vorzeichen. Die Funktion x ist daher in I streng monoton und besitzt eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $\tau : x(I) \to I$. Für $t \in I$ gilt dann

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (x(t), y \circ \tau(x(t))) = (x(t), f(x(t)))\,.$$

Dabei ist $f := y \circ \tau$. Die Ableitung von f errechnet sich nach der Kettenregel und der Ableitungsregel für eine Umkehrfunktion:

$$\frac{d}{dx}f(x_0) = \frac{d}{dt}y(\tau(x_0)) \cdot \frac{d}{dx}\tau(x_0) = \frac{\frac{d}{dt}y(t_0)}{\frac{d}{dt}x(t_0)}.$$

T3 Krümmung

Eine ebene Kurve Γ vom Typ C^2 sei nach ihrer Bogenlänge durch $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert. Es bezeichne $\nu : I \to \mathbb{R}^2$ die sog. *Normale* des Weges γ, d.h.

$$\nu := J\gamma' \qquad \text{mit} \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Zeige, dass γ'' senkrecht auf γ' steht.

Die *Krümmung* $\kappa : I \to \mathbb{R}$ des Weges γ sei erklärt durch

$$\gamma'' = \kappa\nu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \kappa = \langle \nu, \gamma'' \rangle = \langle J\gamma', \gamma'' \rangle.$$

Die Abbildung $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bezeichnet das übliche Skalarprodukt.
Die Krümmung einer Kurve ist ein Maß der Abweichung vom geradlinigen Verlauf. Genauer, eine Kurve soll als Krümmung im Punkt $\gamma(t)$ die Krümmung des am besten approximierenden Kreises haben.

ii) Man bestimme die Krümmung eines Kreises mit Radius $r > 0$.

iii) Zeige, dass der Kreis mit Mittelpunkt $m(t_0) := \gamma(t_0) + \rho(t_0)\nu(t_0)$ und Radius $|\rho(t_0)|$ mit $\rho(t_0) = \frac{1}{\kappa(t_0)}$ die Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ in $\gamma(t_0)$ in zweiter Ordnung berührt, d.h., für die Abstandsfunktion

$$d(t) = \|\gamma(t) - m(t_0)\|_2 - |\rho(t_0)|$$

gilt $d(t_0) = d'(t_0) = d''(t_0) = 0$.

iv) Die Krümmung $\kappa(t)$ einer ebenen Kurve $\Gamma := \mathrm{spur}(\gamma)$, gegeben durch eine reguläre Parametrisierung (nicht notwendig nach Bogenlänge parametrisiert!) $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ vom Typ C^2, ist

$$\kappa := \frac{1}{|\gamma'|^3} \det\left(\gamma', \gamma''\right).$$

v) Der Graph einer Funktion $f \in C^2(I)$ lässt sich als Kurve mit $\gamma(t) := (t, f(t))$ auffassen. Man zeige, dass dann die Gleichung

$$\kappa = \frac{f''}{\sqrt{1 + f'^2}^3}$$

gilt. Wann stimmen in einem Punkt $t \in I$ die zweite Ableitung $f''(t)$ und die Krümmung $\kappa(t)$ überein?

i) Bei einem nach Bogenlänge parametrisierten Weg gilt:

$$\langle \gamma'', \gamma' \rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle \gamma', \gamma' \rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} 1 = 0.$$

Damit steht γ'' senkrecht auf γ', d.h. parallel zu ν.

ii) Üblicherweise wird der Kreis mit Radius $r > 0$ (und oBdA mit Mittelpunkt $(0,0)$) durch den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := (r\cos(t), r\sin(t))$ parametrisiert. Wegen $|\gamma'(t)| = |(-r\sin(t), r\cos(t))^T| = r$ für alle $t \in [0, 2\pi]$, ist der Weg γ für $r \neq 1$ nicht nach Bogenlänge parametrisiert. Wir benötigen aber eine Parametrisierung mit $|\gamma_0'| = 1$:

$$\gamma_0 : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_0(t) := \left(r\cos(\frac{t}{r}), r\sin(\frac{t}{r})\right)^T.$$

Für diese gilt nun tasächlich $|\gamma_0'(t)| = |(-\sin(\frac{t}{r}), \cos(\frac{t}{r}))^T| = 1$ für alle $t \in [0, 2\pi r]$. Wir können nun also die Krümmung κ des Kreises über die Definition bestimmen:

$$\kappa(t) = \langle J\gamma_0'(t), \gamma_0''(t)\rangle = \left\langle \left(-\cos(\frac{t}{r}), -\sin(\frac{t}{r})\right)^T, \left(-\frac{1}{r}\cos(\frac{t}{r}), -\frac{1}{r}\sin(\frac{t}{r})\right)^T \right\rangle = \frac{1}{r}.$$

iii) *Wegen $\|\nu\|_2 = 1$ gilt*

$$d(t_0) = \|\gamma(t_0) - m(t_0)\|_2 - |\rho(t_0)| = |\rho(t_0)|\|\nu(t_0)\|_2 - |\rho(t_0)| = 0.$$

Aus $\nu = J\gamma'$ folgt $\nu \perp \gamma'$, d.h. $\langle \nu, \gamma'\rangle = 0$. Damit erhalten wir

$$d'(t_0) = \frac{\langle \gamma(t) - m(t_0), \gamma'(t)\rangle}{\|\gamma(t) - m(t_0)\|_2}\Big|_{t=t_0} = -\frac{\rho(t_0)\langle \nu(t_0), \gamma'(t_0)\rangle}{|\rho(t_0)|} = 0.$$

Da der Weg γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt $\langle\gamma', \gamma'\rangle = |\gamma'|^2 = 1$ und $\kappa = \langle \nu, \gamma''\rangle$. Wir bekommen also

$$\begin{aligned} d''(t_0) &= \frac{\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle + \langle \gamma(t) - m(t_0), \gamma''(t)\rangle}{\|\gamma(t) - m(t_0)\|_2} - \frac{\langle \gamma(t) - m(t_0), \gamma'(t)\rangle^2}{\|\gamma(t) - m(t_0)\|_2^3}\Big|_{t=t_0} \\ &= \frac{1 - \rho(t_0)\langle \nu(t_0), \gamma''(t_0)}{|\rho(t_0)|} + \frac{\rho(t_0)\langle \nu(t_0), \gamma'(t)\rangle^2}{|\rho(t_0)|^3} = \frac{1 - \rho(t_0)\kappa(t_0)}{|\rho(t_0)|} + 0 = 0. \end{aligned}$$

iv) *Es gibt einen nach Bogenlänge parametriserten Weg $\tilde\gamma : \tilde I \to \mathbb{R}^2$ und eine orientierungserhaltende Parametertransformation $\phi : I \to \tilde I$ (C^2-Diffeomorphismus: s. Bemerkung auf Seite 4-5 und Lemma im Skript und Korollar 3.6 aus der Vorlesung), so dass $\gamma = \tilde\gamma \circ \phi$. Nach Ketten- und Produktregel ist*

$$\gamma' = (\tilde\gamma' \circ \phi)\phi', \qquad \gamma'' = (\tilde\gamma'' \circ \phi)\phi'^2 + (\tilde\gamma' \circ \phi)\phi''.$$

Wegen $\langle J\tilde\gamma', \tilde\gamma'\rangle = 0$ folgt

$$\langle J\gamma', \gamma''\rangle = \langle J(\tilde\gamma' \circ \phi), \tilde\gamma'' \circ \phi\rangle\phi'^3 = (\tilde\kappa \circ \phi)\phi'^3.$$

Mit $|\gamma'| = |\tilde\gamma' \circ \phi||\phi'| = \phi' > 0$ erhalten wir

$$\kappa = \tilde\kappa \circ \phi = \frac{1}{|\gamma'|^3}\langle J\gamma', \gamma''\rangle.$$

Es bleibt noch $\langle J\gamma', \gamma''\rangle = \det(\gamma'.\gamma'')$ zu zeigen. Für jedes Paar von Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\langle Jv, w\rangle = \langle (-v_2, v_1)^T, (w_1, w_2)^T\rangle = v_1w_2 - v_2w_1 = \det(v, w).$$

v) *Auch hier ist i.a. der Weg $\gamma(t) = (t, f(t))$ nicht nach Bogenlänge parametrisiert. Unter Benutzung von Aufgabenteil iv) erhalten wir*

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (f'(t))^2}^3}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(t) & f''(t)\end{pmatrix} = \frac{f''(t)}{\sqrt{1 + f'(t)^2}^3}.$$

Genau dann, wenn die Tangente horizontal ist, ist die Krümmung die zweite Ableitung:

$$f'(t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \kappa(t) = f''(t).$$