Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Jennifer Prasiswa
Christian Komo
Raphael Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

24.06.2009

Analysis II für M, LaG, Ph

10. Tutorium

T1 Ein nicht-rektifizierbarer Weg

Man zeige, dass der (stetige) Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (t, y(t))$, definiert durch

$$y(t) := \begin{cases} t\sin(\frac{1}{t}) & \text{für } t \in (0,1] \\ 0 & \text{für } t = 0, \end{cases}$$

nicht rektifizierbar ist.

T2 Die Spur als Graph

Es sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, mit $\gamma(t) := (x(t), y(t))$. Die Funktion $\frac{d}{dt}x$ habe auf I keine Nullstelle. Zeige, dass es eine stetig differenzierbare Funktion f auf dem Intervall $J := x(I)$ gibt, deren Graph die Spur von γ ist. Die Ableitung von f an einer Stelle $x_0 \in J$ mit $x_0 = x(t_0)$ ist

$$\frac{d}{dx} f(x_0) = \frac{\frac{d}{dt} y(t_0)}{\frac{d}{dt} x(t_0)}.$$

T3 Krümmung

Eine ebene Kurve Γ vom Typ C^2 sei nach ihrer Bogenlänge durch $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert. Es bezeichne $\nu : I \to \mathbb{R}^2$ die sog. *Normale* des Weges γ, d.h.

$$\nu := J\gamma' \qquad \text{mit} \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Zeige, dass γ'' senkrecht auf γ' steht.

Die *Krümmung* $\kappa : I \to \mathbb{R}$ des Weges γ sei erklärt durch

$$\gamma'' = \kappa\nu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \kappa = \langle \nu, \gamma'' \rangle = \langle J\gamma', \gamma'' \rangle.$$

Die Abbildung $\langle ., . \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bezeichnet das übliche Skalarprodukt.
Die Krümmung einer Kurve ist ein Maß der Abweichung vom geradlinigen Verlauf. Genauer, eine Kurve soll als Krümmung im Punkt $\gamma(t)$ die Krümmung des am besten approximierenden Kreises haben.

ii) Man bestimme die Krümmung eines Kreises mit Radius $r > 0$.

iii) Zeige, dass der Kreis mit Mittelpunkt $m(t_0) := \gamma(t_0) + \rho(t_0)\nu(t_0)$ und Radius $|\rho(t_0)|$ mit $\rho(t_0) = \frac{1}{\kappa(t_0)}$ die Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ in $\gamma(t_0)$ in zweiter Ordnung berührt, d.h., für die Abstandsfunktion

$$d(t) = \|\gamma(t) - m(t_0)\|_2 - |\rho(t_0)|$$

gilt $d(t_0) = d'(t_0) = d''(t_0) = 0$.

iv) Die Krümmung $\kappa(t)$ einer ebenen Kurve $\Gamma := \operatorname{spur}(\gamma)$, gegeben durch eine reguläre Parametrisierung (nicht notwendig nach Bogenlänge parametrisiert!) $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ vom Typ C^2, ist

$$\kappa := \frac{1}{|\gamma'|^3} \det\left(\gamma', \gamma''\right).$$

v) Der Graph einer Funktion $f \in C^2(I)$ lässt sich als Kurve mit $\gamma(t) := (t, f(t))$ auffassen. Man zeige, dass dann die Gleichung

$$\kappa = \frac{f''}{\sqrt{1 + f'^2}^3}$$

gilt. Wann stimmen in einem Punkt $t \in I$ die zweite Ableitung $f''(t)$ und die Krümmung $\kappa(t)$ überein?