Analysis II für M, LaG, Ph

9. Tutorium

Lösungsvorschlag

T1 Lokale Extrema

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := 2x^2 - 3xy^2 + y^4$. Zeigen Sie, dass f auf allen Geraden durch $(0,0)$ ein Minimum im Ursprung besitzt. Jedoch ist $(0,0)$ kein lokales Minimum von f.

Lösung. *Sei $(a,b) \neq (0,0)$ gegeben. Wir definieren die eindimensionale Funktion*

$$g(t) := f(t(a,b)) = 2a^2t^2 - 3ab^2t^3 + b^4t^4\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Falls $a = 0$ ist, erhält man $g(t) = b^4t^4$, und somit besitzt g offensichtlich in 0 ein lokales (sogar das eindeutige globale) Minimum. Nun betrachten wir den Fall, dass $a \neq 0$ ist. Für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ erhalten wir für die erste bzw. zweite Ableitung von g:

$$\begin{aligned} g'(t) &= 4a^2t - 9ab^2t^2 + 4b^4t^3\,, \\ g''(t) &= 4a^2 - 18ab^2t + 12b^4t^2. \end{aligned}$$

Es gilt $g'(0) = 0$ und $g''(0) = 4a^2 > 0$. Damit ist 0 ein lokales Minimum von der Geraden g durch den Ursprung und (a,b). Nun zeigen wir, dass f in $(0,0)$ kein lokales Minimum besitzt. Für beliebiges $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $f(x,y) = (y^2 - x)(y^2 - 2x)$. Zu beliebigem $y > 0$ können wir ein beliebig kleines $\epsilon > 0$ wählen, so dass mit $x_\epsilon := y^2 - \epsilon$ die Eigenschaft $y^2 - 2x_\epsilon < 0$ gültig ist. Es folgt $f(x_\epsilon, y) < 0$. Somit liegen in jeder beliebig kleinen Nullumgebung negative Funktionswerte und damit kann $(0,0)$ kein lokales Minimum von f sein.

T2 Implizite Funktionen

Bestimmen Sie alle Punkte des $\mathbb{R}^3$, in denen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \\ y^2 - z^2 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

sich lokal nach (x,y) auflösen lässt. Zeigen Sie insbesondere, dass sich das System (1) bei $(x,y,z) = (1,1,1)$ lokal nach (x,y) auflösen lässt und bestimmen Sie weiterhin die Ableitung der durch diese Auflösungseigenschaft implizit definierten Funktion $z \mapsto (x(z), y(z))$ in einer Umgebung von $z = 1$. Berechnen Sie dazu $(x(z), y(z))$ in einer Umgebung von $z = 1$ explizit.

Lösung. *Wir definieren*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(x,y,z) := (x^2 - y^2, y^2 - z^2).$$

Wir wollen die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ lokal nach (x,y) auflösen. Wir betrachten dazu

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 0 & 2y \end{pmatrix} = 4xy.$$

Somit ist für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) = (0,0)$ und $(x,y) \neq (0,0)$ die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ lokal nach (x,y) auflösbar. Wir zeigen nun, dass sich das System (1) in $(0,0,0)$ nicht lokal nach (x,y) auflösen lässt. Angenommen es gibt eine Umgebung U von 0 und eine stetige Funktion $\phi : U \to V$ mit einer Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$, so dass

$$f(\phi(z), z) = 0 \quad \forall z \in U$$

und $\phi(z)$ für $z \in U$ die einzige in V liegende Lösung der Gleichung $f(w,z) = 0\,, w \in V$ ist. Jedoch gilt für alle $z \in U$

$$f(z,z,z) = 0 \text{ und } f(-z,-z,z) = 0\,,$$

was einen Widerspruch zu der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung $f = 0$ in V darstellt. Nun wollen wir in einem Punkt (x,y,z) mit $f(x,y,z) = (0,0)$ und $(x,y) \neq (0,0)$ die Ableitung der Auflösungsfunktion $\phi(z) = (x(z), y(z))$ berechnen. Es gilt (siehe Satz auf Seite 117 im Ana 2 Skript über mehrdimensionale Differentialrechnung)

$$\begin{aligned}
\phi'(z) &= -\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x(z),y(z),z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x(z),y(z),z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x(z),y(z),z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x(z),y(z),z) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z}(x(z),y(z),z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(x(z),y(z),z) \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} 2x(z) & -2y(z) \\ 0 & 2y(z) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{4x(z),y(z)} \begin{pmatrix} 2y(z) & 2y(z) \\ 0 & 2x(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z}{x(z)} \\ \frac{z}{y(z)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (1) erhalten wir $x(z) = z$ oder $x(z) = -z$ und $y(z) = z$ oder $y(z) = -z$. Falls wir die Auflösungsfunktion im Punkt $(1,1,1)$ bestimmen wollen, müssen wir $x(z) = z$ und $y(z) = z$ wählen. Damit erhalten wir aus der obigen Rechnung $\phi'(1) = (1,1)$.

T3 Ein Kriterium für globale Umkehrbarkeit

(a) Beweisen Sie die folgende Aussage:

Lemma. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : U \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar und es gelte*

$$|J_f(x) - I| < 1 \quad \forall x \in U\,,$$

wobei I die Einheitsmatrix auf $\mathbb{R}^n$ und $|\cdot|$ die Operator-Norm zur euklidischen Norm sei. Dann ist f in U injektiv.

Hinweis. Nach dem Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen (siehe Tutorium 6, Aufgabe 2) gilt für beliebige $x, y \in U$

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 J_f(x + t(y-x))\,dt\,(y-x).$$

(b) Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x,y,z) = (x + \frac{1}{3}e^{-y^2}, y + \frac{1}{3}e^{-z^2}, z + \frac{1}{3}e^{-x^2})$$

auf $\mathbb{R}^3$ definierte Funktion injektiv ist.

Lösung.

(a) *Wir nehmen an, es gebe $a, b \in U$ mit $f(a) = f(b)$. Wir definieren auf U die Abbildung $g := f - \mathrm{Id}$ mit der Identität Id. Es folgt*

$$b - a = g(b) - g(a) = \int_0^1 J_g(a + t(b-a))\,dt\,(b-a).$$

Wir erhalten daraus den Widerspruch

$$|b-a| \leq \int_0^1 |J_g(a + t(b-a))|\,dt\,|b-a| = \int_0^1 |J_f(a+t(b-a)) - I|\,dt\,|b-a| < |b-a|.$$

(b) *Es gilt für* $(x, y, z) \in U$

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3}ye^{-y^2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3}ze^{-z^2} \\ -\frac{2}{3}xe^{-x^2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} |J_f(x, y, z) - I| &= \begin{vmatrix} 0 & -\frac{2}{3}ye^{-y^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}ze^{-z^2} \\ -\frac{2}{3}xe^{-x^2} & 0 & \end{vmatrix} \\ &= \sqrt{(\frac{2}{3}ye^{-y^2})^2 + (\frac{2}{3}ze^{-z^2})^2 + (\frac{2}{3}xe^{-x^2})^2} \end{aligned}$$

Eine Kurvendiskussion liefert, dass

$$(te^{-t^2})^2 \leq \frac{1}{2}e^{-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Damit folgt

$$|J_f(x, y, z) - I| \leq \frac{2}{3}\sqrt{3\frac{1}{2}e^{-1}} = \sqrt{\frac{2}{3e}} < 1.$$

Mit (a) folgt die geforderte Aussage.