Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Christian Komo
Jennifer Prasiswa
Raphael Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

17.06.2009

Analysis II für M, LaG, Ph

9. Tutorium

T1 Lokale Extrema

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := 2x^2 - 3xy^2 + y^4$. Zeigen Sie, dass f auf allen Geraden durch $(0, 0)$ ein Minimum im Ursprung besitzt. Jedoch ist $(0, 0)$ kein lokales Minimum von f.

T2 Implizite Funktionen

Bestimmen Sie alle Punkte des $\mathbb{R}^3$, in denen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \\ y^2 - z^2 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

sich lokal nach (x, y) auflösen lässt. Zeigen Sie insbesondere, dass sich das System (1) bei $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ lokal nach (x, y) auflösen lässt und bestimmen Sie weiterhin die Ableitung der durch diese Auflösungseigenschaft implizit definierten Funktion $z \mapsto (x(z), y(z))$ in einer Umgebung von $z = 1$. Berechnen Sie dazu $(x(z), y(z))$ in einer Umgebung von $z = 1$ explizit.

T3 Ein Kriterium für globale Umkehrbarkeit

(a) Beweisen Sie die folgende Aussage:

Lemma. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : U \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar und es gelte*

$$|J_f(x) - I| < 1 \quad \forall x \in U\,,$$

wobei I die Einheitsmatrix auf $\mathbb{R}^n$ und $|\cdot|$ die Operator-Norm zur euklidischen Norm sei. Dann ist f in U injektiv.

Hinweis. Nach dem Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen (siehe Tutorium 6, Aufgabe 2) gilt für beliebige $x, y \in U$

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 J_f(x + t(y - x))\,dt\,(y - x).$$

(b) Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x, y, z) = (x + \frac{1}{3}e^{-y^2}, y + \frac{1}{3}e^{-z^2}, z + \frac{1}{3}e^{-x^2})$$

auf $\mathbb{R}^3$ definierte Funktion injektiv ist.