Analysis II für M, LaG, Ph

8. Tutorium

Lösungsvorschlag

T1 Zum Satz über Umkehrabbildungen

Nach Satz 3.4 (s. Vorlesung) gibt es für eine stetig differenzierbare Funktion mit invertierbarer Jacobi-Matrix lokal eine Umkehrabbildung. Wir betrachten hier ein Beispiel, welches zeigt, dass für diesen Satz auf **stetige** Differenzierbarkeit nicht verzichtet werden kann.

Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$\phi(s) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} \leq |s| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}, \\ s + O(s^2) & \text{für } s \to 0. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet das Landau-Symbol $O(s^2)$ die asymptotisch obere Schranke s^2, d.h. für $f \in O(s^2)$ gilt

$$0 \leq \limsup_{s \to 0} \left| \frac{f(s)}{s^2} \right| < \infty.$$

Man zeige nun:

i) Die Funktion ϕ ist in $s = 0$ differenzierbar und es gilt $\phi'(0) = 1$.

ii) Die Funktion ϕ ist in $s = 0$ nicht stetig differenzierbar.

iii) Die Funktion ϕ ist in keiner Nullumgebung injektiv.

i) Zunächst mache man sich klar, dass die Funktion wohldefiniert ist, also dass ϕ auch in $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}, \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}]$ das asymptotische Verhalten $s + O(s^2)$ zeigt. Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $\frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} \leq |s| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}$. Wir schreiben $s =: \frac{1}{n} + \delta$ mit $\delta \in [-\frac{1}{4n^2}, \frac{1}{4n^2}]$, also $\delta \in O(\frac{1}{n^2})$. Wegen $\frac{1}{n} \in O(s)$ haben wir $\delta \in O(s^2)$.

Nun untersuchen wir den Differentialquotienten von ϕ in $s = 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\phi(h) - \phi(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h + O(h^2)}{h} = 1 + \lim_{h \to 0} \frac{O(h^2)}{h^2} \cdot h = 1.$$

Die Funktion ϕ ist also im Punkt $s = 0$ differenzierbar.

ii) Mit der Nullfolge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ erhalten wir $\phi(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ und $\phi'(\frac{1}{n}) = 0$ (weil ϕ in der Umgebung $(\frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}, \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2})$ um $\frac{1}{n}$ konstant ist). Für die Ableitung gilt also im Punkt $s = 0$

$$\lim_{n \to \infty} \phi'(\frac{1}{n}) = 0 \neq 1 = \phi'(0),$$

d.h. die Funktion ϕ ist im Punkt $s = 0$ nicht stetig differenzierbar.

iii) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Damit liegt in der Nullumgebung $U_\varepsilon(0) := \{x \in \mathbb{R} | \ |x| < \varepsilon\}$ das Intervall $[\frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}, \frac{1}{n}]$ auf dem die Funktion ϕ konstant gleich $\frac{1}{n}$ ist. Damit ist ϕ nicht injektiv in $U_\varepsilon(0)$.

T2 Eine Lipschitz-stetige Bijektion

Es ist bekannt, dass stetige, bijektive Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich stetige Umkehrfunktionen haben (s. Satz im Skript, Seite 20). Wir zeigen nun, dass eine entprechende Aussage für Lipschitz-stetige Funktionen nicht gilt. Man zeige hierfür

i) Die Funktion $f : [-1, 1] \to [-1, 1], \quad f(x) := x^3$ ist Lipschitz-stetig.

ii) Die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0, 1] \to [0, 1], \quad f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ ist nicht Lipschitz-stetig.

i) Für alle $x, y \in [-1, 1]$ gilt

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 + xy + y^2||x - y| \leq \left(|x^2| + |x||y| + |y^2|\right)|x - y| \leq 3|x - y|.$$

Also ist f eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante 3. (Da f stetig differenzierbar ist, folgt die Lipschitz-Stetigkeit auch mit Aufgabe T33 des 11. Tutoriums aus Analysis I.)

ii) Angenommen f^{-1} sei Lipschitz-stetig, dann gäbe es eine Konstante $L_{f^{-1}} > 1$, so dass für alle $x \in [-1, 1]$ gilt

$$|\sqrt[3]{x}| = |f^{-1}(x) - f^{-1}(0)| \leq L_{f^{-1}}|x - 0|.$$

Definieren wir nun $x_0 := (2L_{f^{-1}})^{-\frac{3}{2}} \in [-1, 1]$, so erhalten wir

$$\frac{|\sqrt[3]{x_0}|}{|x_0|} = |x_0^{-\frac{2}{3}}| = 2L_{f^{-1}} > L_{f^{-1}}$$

und damit einen Widerspruch zur angenommenen Lipschitz-Stetigkeit von f^{-1}.

T3 Peano-Kurven

Wir wollen uns nun mit einer sogenannten *Peano-Kurve* beschäftigen, d.h. mit einer Kurve, die ein ganzes Quadrat ausfüllt. Zur Konstruktion gibt es verschiedene Ansätze, sowohl geometrisch motivierte (Peano, Hilbert), als auch rein algebraische. Wir beschäftigen uns hier mit einer Kurve letzteren Typs, die Idee dieser Konstruktion stammt von Lebuesge.

Satz: Sei $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ eine stetige Funktion mit folgenden Eigenschaften:

$$f(t) = 0, \text{ für } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \quad f(t) = 1, \text{ für } \frac{2}{3} \leq t \leq 1, \quad \text{und} \quad f(t + 2) = f(t).$$

Setzt man

$$x(t) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n-1}t), \qquad y(t) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n}t),$$

so bildet die (stetige) Kurve $\gamma : [0, 1] \to [0, 1]^2$ mit $\gamma(t) := (x(t), y(t))$ das Intervall $[0, 1]$ surjektiv auf das Quadrat $[0, 1]^2$ ab.

Beweise den Satz wie folgt:

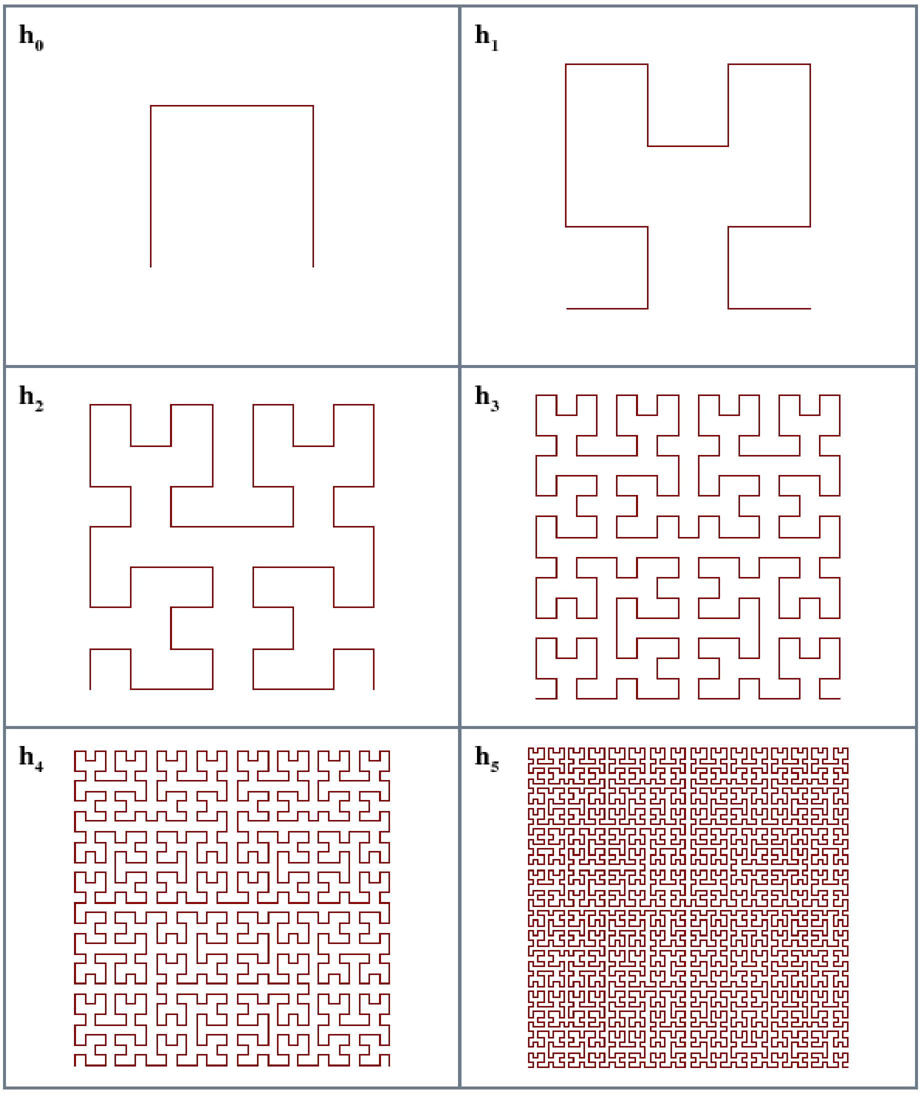
i) Mache Dir die Stetigkeit von γ klar.

ii) Zeige, dass jeder Punkt $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$ eine Darstellung

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n-1}, \qquad y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n}, \qquad a_n \in \{0, 1\}$$

besitzt, und dass für $t_0 = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} 3^{-\nu-1} a_\nu$ gilt $f(3^n t_0) = a_n$. Weise damit die Surjektivität von γ nach.

Ein geometrischer Algorithmus zur Erzeugung einer Peano-Kurve stammt von Hilbert. Die folgenden Abbildungen zeigen die ersten sechs Approximationspolygone.



i) Da f eine stetige Funktion ist, sind für alle $m \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$x_m(t) := \sum_{n=1}^{m} 2^{-n} f(3^{2n-1}t), \qquad y_m(t) := \sum_{n=1}^{m} 2^{-n} f(3^{2n}t)$$

stetig. Die Funktionenfolge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert nun gleichmäßig gegen x:

$$\sup_{t\in[0,1]} |x(t) - x_m(t)| = \sup_{t\in[0,1]} \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n-1}t) \right| \leq \|f\|_\infty \sum_{m+1}^{\infty} 2^{-n} \leq 2.$$

Ebenso konvergiert die Folge $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen y. Daher sind x und y, und somit auch γ stetig.

ii) Zunächst zeigen wir, dass sich jede Zahl $\xi \in [0,1)$ darstellen lässt durch

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\alpha_n \qquad \text{mit } \alpha_n \in \{0,1\}.$$

Für $\xi < \frac{1}{2}$ setzen wir $\alpha_1 := 0$, sonst $\alpha_1 := 1$. Das erste Folgenglied ist dann $\xi_1 := \frac{\alpha_1}{2}$. In den nächsten Schritten halbieren wir jeweils das Intervall $[\xi_i, \xi_i + \frac{1}{2^i})$ in dem sich ξ befindet und setzen entsprechend wieder $\alpha_{i+1} := 0$, falls $\xi < \xi_i + \frac{1}{2^{i+1}}$, bzw. $\alpha_{i+1} := 1$, falls $\xi \geq \xi_i + \frac{1}{2^{i+1}}$. Damit definieren wir nun $\xi_{i+1} := \xi_i + \frac{\alpha_{i+1}}{2^{i+1}}$. Wir erhalten somit eine gegen ξ konvergierende Folge $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$:

$$|\xi - \xi_i| \leq \frac{1}{2^i} \to 0, \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Wir können daher schreiben

$$\xi = \lim_{i\to\infty} \xi_i = \lim_{i\to\infty} \sum_{n=1}^{i} 2^{-n}\alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\alpha_n.$$

Für den Fall $\xi = 1$ haben wir die Darstellung $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$, d.h. wir wählen $a_n := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die in der Aufgabenstellung angegebene Darstellung eines Punktes $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ ist nun eine einfache Konsequenz aus der oben gezeigten Darstellung im eindimensionalen Fall $\xi \in [0,1]$. ("Die Folgenglieder a_i werden abwechselnd verteilt.")

Nun untersuchen wir den Funktionswert $f(3^n t_0)$ mit $t_0 = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} 3^{-\nu-1}a_\nu$ und erhalten zunächst:

$$\begin{aligned} f(3^n t_0) &= f(2\sum_{\nu=1}^{\infty} 3^{n-\nu-1}a_\nu) \\ &= f(2\sum_{\nu=1}^{n-1} 3^{n-\nu-1}a_\nu + \frac{2}{3}a_n + 2\sum_{\nu=n+1}^{\infty} 3^{n-\nu-1}a_\nu). \end{aligned}$$

Man sieht schnell, das der Term $2\sum_{\nu=1}^{n-1} 3^{n-\nu-1}a_\nu$ eine gerade (natürliche) Zahl ist. Da f eine 2-periodische Funktion ist, haben wir also

$$f(3^n t_0) = f(\frac{2}{3}a_n + 2\sum_{\nu=n+1}^{\infty} 3^{n-\nu-1}a_\nu).$$

Mit der Abschätzung

$$0 \leq 2\sum_{\nu=n+1}^{\infty} 3^{n-\nu-1}a_\nu \leq \frac{2}{9}\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^\nu = \frac{1}{3}$$

bekommen wir mit den Eigenschaften von f für $a_n = 0$ den Wert $f(3^n t_0) = 0 = a_n$ und für $a_n = 1$ den Wert $f(3^n t_0) = 1 = a_n$.

Kommen wir schließlich zur Surjektivität der Peano-Kurve. Sei $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ ein beliebiger Punkt aus dem Einheitsquadrat. Für diese gibt es die Darstellung

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2n-1}, \qquad y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2n}, \qquad a_n \in \{0,1\}.$$

Wir identifizieren also den Punkt (x_0, y_0) mit einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Für diese Folge ist nun $0 \leq t_0 := 2\sum_{\nu=1}^{\infty} 3^{-\nu-1}a_\nu \leq \frac{1}{3} < 1$ gerade das Argument, so dass $\gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$. Damit ist γ eine surjektive Kurve.