Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Jennifer Prasiswa
Christian Komo
Raphael Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10.06.2009

Analysis II für M, LaG, Ph

8. Tutorium

T1 Zum Satz über Umkehrabbildungen

Nach Satz 3.4 (s. Vorlesung) gibt es für eine stetig differenzierbare Funktion mit invertierbarer Jacobi-Matrix lokal eine Umkehrabbildung. Wir betrachten hier ein Beispiel, welches zeigt, dass für diesen Satz auf **stetige** Differenzierbarkeit nicht verzichtet werden kann.

Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$\phi(s) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} \leq |s| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}, \\ s + O(s^2) & \text{für } s \to 0. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet das Landau-Symbol $O(s^2)$ die asymptotisch obere Schranke s^2, d.h. für $f \in O(s^2)$ gilt

$$0 \leq \limsup_{s \to 0} \left| \frac{f(s)}{s^2} \right| < \infty.$$

Man zeige nun:

i) Die Funktion ϕ ist in $s = 0$ differenzierbar und es gilt $\phi'(0) = 1$.

ii) Die Funktion ϕ ist in $s = 0$ nicht stetig differenzierbar.

iii) Die Funktion ϕ ist in keiner Nullumgebung injektiv.

T2 Eine Lipschitz-stetige Bijektion

Es ist bekannt, dass stetige, bijektive Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich stetige Umkehrfunktionen haben (s. Satz im Skript, Seite 20). Wir zeigen nun, dass eine entprechende Aussage für Lipschitz-stetige Funktionen nicht gilt. Man zeige hierfür

i) Die Funktion $f : [-1, 1] \to [-1, 1], \quad f(x) := x^3$ ist Lipschitz-stetig.

ii) Die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0, 1] \to [0, 1], \quad f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ ist nicht Lipschitz-stetig.

T3 Peano-Kurven

Wir wollen uns nun mit einer sogenannten *Peano-Kurve* beschäftigen, d.h. mit einer Kurve, die ein ganzes Quadrat ausfüllt. Zur Konstruktion gibt es verschiedene Ansätze, sowohl geometrisch motivierte (Peano, Hilbert), als auch rein algebraische. Wir beschäftigen uns hier mit einer Kurve letzteren Typs, die Idee dieser Konstruktion stammt von Lebuesge.

Satz: Sei $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine stetige Funktion mit folgenden Eigenschaften:

$$f(t) = 0, \text{ für } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \quad f(t) = 1, \text{ für } \frac{2}{3} \leq t \leq 1, \quad \text{und} \quad f(t+2) = f(t).$$

Setzt man

$$x(t) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n-1}t), \qquad y(t) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n}t),$$

so bildet die (stetige) Kurve $\gamma : [0,1] \to [0,1]^2$ mit $\gamma(t) := (x(t), y(t))$ das Intervall $[0,1]$ surjektiv auf das Quadrat $[0,1]^2$ ab.

Beweise den Satz wie folgt:

i) Mache Dir die Stetigkeit von γ klar.

ii) Zeige, dass jeder Punkt $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ eine Darstellung

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n-1}, \qquad y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n}, \qquad a_n \in \{0,1\}$$

besitzt, und dass für $t_0 = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} 3^{-\nu-1} a_\nu$ gilt $f(3^n t_0) = a_n$. Weise damit die Surjektivität von γ nach.

Ein geometrischer Algorithmus zur Erzeugung einer Peano-Kurve stammt von Hilbert. Die folgenden Abbildungen zeigen die ersten sechs Approximationspolygone.