Analysis II für M, LaG, Ph

7. Tutorium
Lösungsvorschlag

Ziel dieses Tutoriums ist der Beweis des folgenden fundamentalen Theorems:

Theorem (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei $n \geq 1$ und sei $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_j \in \mathbb{C}$ für $0 \leq j \leq n-1$ ein komplexes Polynom. Dann besitzt P in $\mathbb{C}$ mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Wir identifizieren die komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$. In diesem Sinne können wir von der Stetigkeit von Abbildungen mit $\mathbb{C}$ als Definitions- und/oder Wertebereich sprechen. Analog werden offene, abgeschlossene und kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ definiert.

T1 Stetigkeit von $|P|$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$z \mapsto |P(z)|\,, \quad \mathbb{C} \to \mathbb{R}\,,$$

stetig ist und auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Minimum annimmt.

Lösung. *Mit der Identifikation von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ ist für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ die Abbildung*

$$(x, y)^T \mapsto (x + iy)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} x^{k-l} (iy)^l\,, \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

stetig und somit auch $(x, y) \mapsto P(x + iy)$, gesehen als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Da die Normfunktion stetig ist, folgt die Stetigkeit der reellwertigen Funktion $\|\cdot\| \circ P$ auf $\mathbb{R}^2$ und somit die Stetigkeit von $|P|$ auf $\mathbb{C}$.

T2 Hilfssatz 1

Zeigen Sie, dass $z \mapsto |P(z)|$ ein Minimum auf $\mathbb{C}$ annimmt.

Hinweis. Finden Sie geeignete positive Konstanten A, R so dass $|P(z)| \geq A > |a_0|$ für $|z| \geq R$.

Lösung. *Wir definieren eine Funktion r auf $\mathbb{C}$ durch $P(z) = z^n(1 + r(z))$. Wir erhalten für $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$*

$$r(z) = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}.$$

Wir schätzen für $|z| \geq 1$ ab und erhalten

$$|r(z)| \leq \frac{|a_0|}{|z^n|} + \cdots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|} \leq \frac{|a_0|}{|z|} + \cdots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|} = \frac{M}{|z|}$$

mit $M := |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|$. Für beliebiges $|z| > \max(1, 2M)$ gilt $|r(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{1}{2}$. Dies impliziert für diese z

$$|P(z)| = |z^n||1 + r(z)| \geq \frac{1}{2}|z|^n \geq \frac{1}{2}|z| > M. \tag{1}$$

Aus T1 wissen wir, dass $|P|$ stetig ist und somit (siehe Vorlesung) ein Minimum auf der kompakten Menge $\{\, z \in \mathbb{C}\,, |z| \leq \max(1, 2M) \,\}$ annimmt. Aus (1) und $|P(0)| = |a_0| \leq M$ folgt, dass dieses Minimum das global Minimum von $|P|$ auf $\mathbb{C}$ ist.

T3 Hilfssatz 2

Beweisen Sie: Ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) \neq 0$ kann nicht Minimalstelle von $|P|$ sein.
Gehen Sie dazu wie folgt vor: Definieren Sie $H(w) := \frac{P(z_0+w)}{P(z_0)}$. Zeigen Sie, dass man $\beta \in \mathbb{C}$ finden kann, so dass

$$q(w) := H(\beta w) = 1 - w^k + Q(w)$$

für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt. Dabei seien $k \geq 1$, und $Q(w) = w^{k+1}S(w)$ mit einem Polynom S. Nun versuchen Sie, $w_0 > 0$ mit $Q(w_0) < w_0^k$ zu finden.

Lösung. *Angenommen, wir haben $z_0 \in \mathbb{C}$, so dass $|P(z_0)| = \min_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$, aber $P(z_0) \neq 0$. Wir führen einen Widerspruch zur Minimaleigenschaft von z_0 herbei. Wir definieren $H(w) := \frac{P(z_0+w)}{P(z_0)}$ für $w \in \mathbb{C}$. Wir schreiben*

$$H(w) = 1 + bw^k + \tilde{H}(w)\,, \quad k \geq 1\,, b \neq 0\,,$$

mit einem Polynom $\tilde{H}$, das nur aus w-Potenzen der Ordnung mindestens $k+1$ besteht. Nun wählen wir $\beta \in \mathbb{C}$ mit $\beta^k = -\frac{1}{b}$ (für die Existenz k-ter Wurzeln siehe Übung 13, H1). Nun erhalten wir mit der Definition von β für beliebiges $w \in \mathbb{C}$

$$q(w) := H(\beta w) = 1 - w^k + Q(w) \tag{2}$$

mit $Q(w) = w^{k+1}S(w)$, wobei S ein komplexes Polynom ist. Nun versuchen wir, eine positive reelle Zahl w_0 zu finden, so dass $Q(w_0) < w_0^k$ gilt. Wir wählen $M > 0$, so dass $|S(w)| \leq M$ für $|w| \leq 1$ gilt. Für ein $0 < w_0 < \min(1, \frac{1}{M})$ erhalten wir

$$|Q(w_0)| \leq |w_0||w_0|^k|S(w_0)| < w_0\, w_0^k M < M w_0^k \frac{1}{M} = w_0^k.$$

Aus der oberen Abschätzung folgt

$$|q(w_0)| \leq 1 - w_0^k + |Q(w_0)| < 1 - w_0^k + w_0^k = 1. \tag{3}$$

Kombinieren wir (2) und (3) miteinander, so folgt $|H(\beta w_0)| < 1$ und aus der Definition von H erhalten wir den Widerspruch $|P(z_0 + \beta w_0)| < |P(z_0)|$ zur Minimaleigenschaft von z_0.

T4 Beenden des Beweises

Nun beenden Sie den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Lösung. *Da es (mindestens) ein Minimum von $|P|$ auf $\mathbb{C}$ gibt und dieses nur in einer Nullstelle von P angenommen werden kann, ist der Fundamentalsatz der Algebra bewiesen.*

Bemerkung. Herzlichen Glückwunsch, ein präziser Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra war lange Zeit ein ungelöstes Problem der Mathematik. Die meisten Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra benutzen wesentlich tieferliegende Hilfsmittel (siehe Analysis III, dort wird mittels Funktionentheorie dieser Satz bewiesen). Der in diesem Tutorium geführte Beweis benutzt nur Stetigkeit von Funktionen und die Existenz k-ter Wurzeln, ist also relativ elementar.