Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Christian Komo
Jennifer Prasiswa
Raphael Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

03.06.2009

Analysis II für M, LaG, Ph

7. Tutorium

Ziel dieses Tutoriums ist der Beweis des folgenden fundamentalen Theorems:

Theorem (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei $n \geq 1$ und sei $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_j \in \mathbb{C}$ für $0 \leq j \leq n-1$ ein komplexes Polynom. Dann besitzt P in $\mathbb{C}$ mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Wir identifizieren die komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$. In diesem Sinne können wir von der Stetigkeit von Abbildungen mit $\mathbb{C}$ als Definitions- und/oder Wertebereich sprechen. Analog werden offene, abgeschlossene und kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ definiert.

T1 Stetigkeit von $|P|$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$z \mapsto |P(z)|\,, \quad \mathbb{C} \to \mathbb{R}\,,$$

stetig ist und auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Minimum annimmt.

T2 Hilfssatz 1

Zeigen Sie, dass $z \mapsto |P(z)|$ ein Minimum auf $\mathbb{C}$ annimmt.

Hinweis. Finden Sie geeignete positive Konstanten A, R so dass $|P(z)| \geq A > |a_0|$ für $|z| \geq R$.

T3 Hilfssatz 2

Beweisen Sie: Ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) \neq 0$ kann nicht Minimalstelle von $|P|$ sein.

Gehen Sie dazu wie folgt vor: Definieren Sie $H(w) := \frac{P(z_0+w)}{P(z_0)}$. Zeigen Sie, dass man $\beta \in \mathbb{C}$ finden kann, so dass

$$q(w) := H(\beta w) = 1 - w^k + Q(w)$$

für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt. Dabei seien $k \geq 1$, und $Q(w) = w^{k+1}S(w)$ mit einem Polynom S. Nun versuchen Sie, $w_0 > 0$ mit $|Q(w_0)| < w_0^k$ zu finden.

T4 Beenden des Beweises

Nun beenden Sie den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.