Analysis II für M, LaG, Ph

6. Tutorium
Lösungsvorschlag

Sei $[a, b]$ ein kompaktes, reelles Intervall und sei $Y \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge. Wir nehmen an, dass für jedes $y \in Y$ die Funktion $f_y : [a, b] \to \mathbb{R}\,, x \mapsto f(x, y)$ Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ ist. Wir definieren die Funktion

$$I : Y \to \mathbb{R}\,, \quad I(y) := \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Wir nennen I **paramterabhängiges Integral** oder sagen, dass I durch ein Integral mit Parameter definiert ist. Wir beschäftigen uns in diesem Tutorium mit der Frage, ob I differenzierbar ist und ob man gegebenenfalls die Ableitung durch Differenzieren unter dem Integral gewinnen kann, d.h. ob

$$I'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$$

erfüllt ist. Es gilt das folgende

Theorem (Parameterabhängige Integrale)**.** *Seien $[a, b]$ und $[c, d]$ reelle, kompakte Intervalle und sei $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) Die Funktion f ist stetig auf $[a, b] \times [c, d]$.

(ii) Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y} : [a, b] \times [c, d]$ existiert und ist stetig.

Dann ist I auf $[c, d]$ differenzierbar und für jedes $y \in [c, d]$ gilt

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx.$$

T1 Beweis des Theorems über parameterabhängige Integrale

Beweisen Sie das Theorem über paramterabhängige Integrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor: Sei $q \in [c, d]$ und sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} y_n = q\,, y_n \neq q$. Definiere für $k \in \mathbb{N}\,, x \in [a, b]$

$$G_k(x) := \frac{f(x, y_k) - f(x, q)}{y_k - q}\,,$$
$$G(x) := \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Benutzen Sie den Mittelwertsatz und die gleichmäßige Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial y}$ um die gleichmäßige Konvergenz von G_k gegen G für $k \to \infty$ auf $[a, b]$ zu zeigen.

Lösung. *Es gilt für $k \in \mathbb{N}$ mit der Linearität des Integrals*

$$\frac{I(y_k) - I(q)}{y_k - q} = \int_a^b \frac{f(x, y_k) - f(x, q)}{y_k - q}\, dx = \int_a^b G_k(x)\, dx.$$

Es verbleibt, die gleichmäßige Konvergenz von $G_k \to G\,, k \to \infty$, zu zeigen. Anwendung von Hauptsatz 10.9 liefert uns für den Fall, dass G_k gleichmäßig gegen G konvergiert, dass wir Integration und Limesbildung vertauschen können und wir erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{I(y_k) - I(q)}{y_k - y} &= \lim_{k\to\infty} \int_a^b G_k(x)\, dx \\ &= \int_a^b \lim_{k\to\infty} G_k(x)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx.\end{aligned} \tag{1}$$

In der oberen Umformung wurde verwendet, das aus der Definition der partiellen Ableitung folgt, dass $\lim_{k\to\infty} G_k(x) = G(x)$ für alle $x \in [a,b]$ gilt. Die Gleichung (1) bedeutet, dass I in q differenzierbar ist und

$$I'(q) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

gilt. Zum Nachweis der fraglichen gleichmäßigen Konvergenz geben wir uns $\epsilon > 0$ beliebig vor. Da die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ auf $[a,b] \times [c,d]$ stetig ist, ist sie wegen der Kompaktheit dieser Menge dort gleichmäßig stetig, siehe Satz auf Seite auf 18 im Ana 2 Skript über mehrdimensionale Differentation. Wir finden also ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, so dass für jedes $x \in [a,b]$ und für beliebige $y\,, y' \in [c,d]$

$$|y - y'| < \delta \implies |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y')| < \epsilon$$

gilt. Für festes $x \in [a,b]$ ist die auf $[c,d]$ definierte Funktion $y \mapsto f(x,y)$ stetig differenzierbar mit Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Wir wenden den Mittelwertsatz an und erhalten ein $\eta_{x,k}$ zwischen y_k und q mit der Eigenschaft

$$\frac{f(x,y_k) - f(x,q)}{y_k - q} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta_{x,k}).$$

Aus $\lim_{k\to\infty} y_k = q$ folgt die Existenz eines $N = N(\delta(\epsilon)) = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|y_k - y| < \delta$ für alle $k \geq N$. Es folgt $|\eta_{x,k} - q| < \delta$ für jedes $k \geq N$, also

$$|G_k(x) - G(x)| = |\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta_{x,k}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,q)| < \epsilon$$

für alle $k \geq N$ und jedes $x \in [a,b]$. Dies bedeutet gerade, dass die Funktionenfolge $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen G konvergiert und somit ist der Beweis des Theorems vollständig.

T2 Anwendung des Theorems

Berechnen Sie das Integral $I(y) := \int_0^1 \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,, y > 0$.

Hinweis. Differenzieren Sie $J(y) := \int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,, y > 0$ auf 2 Arten. Einmal, indem Sie unter dem Integral differenzieren und einmal, indem Sie J direkt berechnen.

Lösung. *Setze*

$$f : [0,1] \times]0,\infty[\to \mathbb{R}\,, f(x,y) := \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Es sind sowohl f als auch $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$ stetig. Wir wenden das Theorem über parameterabhängige Integrale an und erhalten durch Differenzieren unter dem Integral

$$J'(y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}\,dx = -2yI(y). \tag{2}$$

Andererseits erhalten wir durch durch Substitution für jedes $y > 0$

$$J(y) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{y}\int_0^1 \frac{\frac{1}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}\,dx = \frac{1}{y}\int_0^{\frac{1}{y}} \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{y}\arctan\left(\frac{1}{y}\right).$$

Wir differenzieren und erhalten

$$J'(y) = -\frac{1}{y^2}\arctan\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y(1+y^2)}. \tag{3}$$

Wir erhalten aus (2) und (3)

$$I(y) = -\frac{J'(y)}{2y} = \frac{1}{2y^3}\arctan\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{2y^2(1+y^2)}.$$

T3 Theorem nicht anwendbar

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}\,, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, I(y) := \int_0^1 f(x,y)\,dx$ differenzierbar ist und berechne I'.

(b) Setzt $I^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, I^*(y) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ und berechne $I^*(0)$.

(c) Offenbar ist $I'(0) \neq I^*(0)$. Warum ist das Theorem über paramterabhängige Integrale hier nicht anwendbar?

Lösung.

(a) Es gilt für $y \neq 0$

$$I(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx = -\frac{1}{2}y^3 \int_0^1 \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\,dx$$
$$-\frac{1}{2}y^3 \frac{1}{(x^2+y^2)}\Big|_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{2}y^3\left(\frac{1}{(1+y^2)} - \frac{1}{y^2}\right) = \frac{y}{2} - \frac{y^3}{2(1+y^2)}.$$

Da offensichtlich $I(0) = 0$ *gilt, gilt die obere Formel für alle* $y \in \mathbb{R}$. *Man erhält für* $y \in \mathbb{R}$ *als Ableitung* $I'(y) = \frac{1}{2} - \frac{y^4+3y^2}{2(1+y^2)^2}$.

(b) Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\,, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\ . \end{cases}$$

Aus $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *folgt* $I^*(0) = 0$.

(c) Es ist $I'(0) = \frac{1}{2} \neq 0 = I^*(0)$. *Das Theorem über paramterabhängige Integrale ist in diesem Fall nicht anwendbar, die Differentation unter dem Integral hier nicht zulässig. Der Grund dafür ist, dass die Funktionen* f *und* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *jeweils an der Stelle* $(0,0)$ *unstetig ist.*