Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Christian Komo
Jennifer Prasiswa
Raphael Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6.05.2009

Analysis II für M, LaG, Ph

6. Tutorium

Sei $[a, b]$ ein kompaktes, reelles Intervall und sei $Y \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge. Wir nehmen an, dass für jedes $y \in Y$ die Funktion $f_y : [a, b] \to \mathbb{R}\,, x \mapsto f(x, y)$ Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ ist. Wir definieren die Funktion

$$I : Y \to \mathbb{R}\,, \quad I(y) := \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Wir nennen I **paramterabhängiges Integral** oder sagen, dass I durch ein Integral mit Parameter definiert ist. Wir beschäftigen uns in diesem Tutorium mit der Frage, ob I differenzierbar ist und ob man gegebenenfalls die Ableitung durch Differenzieren unter dem Integral gewinnen kann, d.h. ob

$$I'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$$

erfüllt ist. Es gilt das folgende

Theorem (Parameterabhängige Integrale)**.** *Seien $[a, b]$ und $[c, d]$ reelle, kompakte Intervalle und sei $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) Die Funktion f ist stetig auf $[a, b] \times [c, d]$.

(ii) Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y} : [a, b] \times [c, d]$ existiert und ist stetig.

Dann ist I auf $[c, d]$ differenzierbar und für jedes $y \in [c, d]$ gilt

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx.$$

T1 Beweis des Theorems über parameterabhängige Integrale

Beweisen Sie das Theorem über paramterabhängige Integrale. Gehen Sie dazu wie folgt vor: Sei $q \in [c, d]$ und sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} y_n = q\,, y_n \neq q$. Definiere für $k \in \mathbb{N}\,, x \in [a, b]$

$$G_k(x) := \frac{f(x, y_k) - f(x, q)}{y_k - q}\,,$$
$$G(x) := \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Benutzen Sie den Mittelwertsatz und die gleichmäßige Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial y}$ um die gleichmäßige Konvergenz von G_k gegen G für $k \to \infty$ auf $[a, b]$ zu zeigen.

T2 Anwendung des Theorems

Berechnen Sie das Integral $I(y) := \int_0^1 \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dx\,, y > 0$.

Hinweis. Differenzieren Sie $J(y) := \int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\, dx\,, y > 0$ auf 2 Arten. Einmal, indem Sie unter dem Integral differenzieren und einmal, indem Sie J direkt berechnen.

T3 Theorem nicht anwendbar

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}\,, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases} \;,$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, I(y) := \int_0^1 f(x,y)\,dx$ differenzierbar ist und berechne I'.

(b) Setzt $I^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, I^*(y) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ und berechne $I^*(0)$.

(c) Offenbar ist $I'(0) \neq I^*(0)$. Warum ist das Theorem über paramterabhängige Integrale hier nicht anwendbar?