Analysis II für M, LaG, Ph

5. Tutorium

Lösungsvorschlag

In der Vorlesung wurde der **Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen** bewiesen: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und seien $c, d \in D$ Punkte, deren Verbindungsstrecke $[c, d] = \{ c + t(d - c); t \in [0, 1] \}$ ganz in D enthalten ist. Dann gibt es ein $\xi \in [c, d]$, so dass

$$f(d) - f(c) = f'(\xi)(d - c) \tag{1}$$

gilt. Wir beschäftigen uns in diesem Tutorium mit dem Versuch, den Mittelwertsatz auf vektorwertige Funktionen zu übertragen. Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion. Dann erklären wir das vektorwertige Riemann-Integral durch

$$\int_a^b g(x)\,dx := \left(\int_a^b g_1(x)\,dx, \ldots, \int_a^b g_m(x)\,dx \right)^T.$$

Analog definieren wir für eine matrixwertige Funktion $A : [a, b] \to \mathbb{R}^{m \times n}$ (für jedes $x \in [a, b]$ ist $A(x)$ also eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten) mit stetigen Komponentenfunktionen $A_{i,j} : [a, b] \to \mathbb{R}$ für alle $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

$$\int_a^b A(x)\,dx := \left(\int_a^b A_{i,j}(x)\,dx \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Wir integrieren also komponentenweise und erhalten eine $m \times n$-Matrix.

T1 Norm-Abschätzung für Integrale

Sei $\| \cdot \|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^m$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a, b]$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\left\| \int_a^b f(x)\,dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|\,dx.$$

Hinweis. Verwenden Sie, dass für eine stetige, reellwertige Funktion g auf $[a, b]$ für eine beliebige Folge von Zerlegungen

$$(P_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{ a = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{k_n}^n = b \}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \lim_{n \to \infty} \max_{i=1,\ldots,k_n} t_i^n - t_{i-1}^n = 0$$

die Konvergenz

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{k_n} g(t_i^n)(t_i^n - t_{i-1}^n) = \int_a^b g(x)\,dx.$$

gilt.

Lösung. *Wir wählen eine beliebige Folge von Zerlegungen*

$$(P_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{ a = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{k_n}^n = b \}_{n \in \mathbb{N}} \quad \textit{mit} \lim_{n \to \infty} \max_{i=1,\ldots,k_n} t_i^n - t_{i-1}^n = 0.$$

Wir können z.B. $t_i^n := a + \frac{i}{n}(b - a)$ *für* $i = 0, 1, \ldots, n$ *wählen (äquidistante Zerlegung des Intervalls* $[a, b]$*). Für beliebiges* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\left\| \sum_{i=1}^{k_n} f(t_i^n)(t_i^n - t_{i-1}^n) \right\| \leq \sum_{i=1}^{k_n} \|f(t_i^n)\|(t_i^n - t_{i-1}^n).$$

Wir beachten, dass Konvergenz im $\mathbb{R}^m$ äquivalent ist zu komponentenweiser Konvergenz (siehe Seite 5 im Skript über mehrdimensionale Differentiation) und die Stetigkeit der Normabbildung und erhalten

$$\begin{aligned}\left\|\int_a^b f(x)\,dx\right\| &= \| \lim_{n\to k_n} \sum_{i=1}^{\infty} f(t_i^n)(t_i^n - t_{i-1}^n)\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{k_n} f(t_i^n)(t_i^n - t_{i-1}^n)\right\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \|f(t_i^n)\|(t_i^n - t_{i-1}^n) = \int_a^b \|f(x)\|\,dx.\end{aligned}$$

T2 Vektorwertiger Mittelwertsatz

Gegeben seien eine beliebige offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, eine stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ und Punkte $c, d \in D$, deren Verbindungsstrecke $[c, d]$ ganz in D liegt. Dann gilt

$$f(d) - f(c) = \left(\int_0^1 J_f(c + t(d-c))\,dt\right)(d-c)\,,$$

wobei $J_f(x)$ die Jacobi-Matrix von f in einem Punkt $x \in D$ bezeichnet.

Lösung. *Wir definieren für $j = 1, \dots, n$*

$$\phi_j(t) := f_j(c + t(d-c))\,, \quad t \in [0,1].$$

Anwendung des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung liefert

$$\begin{aligned}f_j(d) - f_j(c) &= \phi_j(1) - \phi_j(0) \\ &= \int_0^1 \phi_j'(t)\,dt = \int_0^1 f_j'(c + t(d-c))\,(b-a)\,dt.\end{aligned}$$

Aus der Definition der Jacobi-Matrix folgt durch Matrixmultiplikation

$$f(d) - f(c) = \int_0^1 J_f(c + t(d-c))(d-c)\,dt = \int_0^1 J_f(c + t(d-c))\,dt\,(d-c).$$

T3 Schrankensatz

Seien $\|\cdot\|_n\,, \|\cdot\|_m$ Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ bzw. auf dem $\mathbb{R}^m$ und sei $\|\cdot\|_{\text{op}}$ die zugehörige Operator- oder Abbildungsnorm bezüglich dieser Normen, d.h., für eine $m \times n$-Matrix A ist $\|A\|_{\text{op}} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_m}{\|x\|_n}$. Sei $K \subseteq D$ eine kompakte, konvexe Menge. Dann gilt für alle $a, b \in K$

$$\|f(b) - f(a)\|_m \leq C\|b-a\|_n$$

mit $C := \sup_{x\in K} \|J_f(x)\|_{\text{op}}$.

Lösung. *Aus der Konvexität von K und T2 erhalten wir für alle $a, b \in K$*

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 J_f(a + t(b-a))\,(b-a)\,dt.$$

Es folgt mit T1

$$\begin{aligned}\|f(b) - f(a)\|_m &\leq \left\|\int_0^1 J_f(a + t(b-a))\,(b-a)\,dt\right\|_m \\ &\leq \int_0^1 \|J_f(a + t(b-a))\,(b-a)\|_m\,dt \leq \int_0^1 \|J_f(a + t(b-a))\|_{\text{op}}\|b-a\|_n\,dt.\end{aligned} \tag{2}$$

In das letzte Ungleichungszeichen ist eingegangen, dass für die Operatornorm $\|Ax\|_m \leq \|A\|_{\text{op}}\|x\|_n$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *gilt. Da die Abbildung* f *stetig differenzierbar ist, ist die Abbildung*

$$x \mapsto J_f(x)\,, \quad D \to (\mathbb{R}^{m\times n}, \|\cdot\|_{\text{op}})\,,$$

stetig (siehe Seite 96/97 im Ana2-Skript über mehrdimensionale Differentation). Es folgt, dass die reellwertige Abbildung $x \mapsto \|J_f(x)\|_{\text{op}}$ *stetig ist und somit auf der kompakten Menge* K *ihr Minimum annimmt: Mit* $C := \sup_{x\in K} \|J_f(x)\|$ *erhält man aus (2)*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \int_0^1 C\|b-a\|_n\,dt = C\|b-a\|_n.$$

T4 Mittelwertsatz nicht analog übertragbar

Zeigen Sie, dass sich der in (1) formulierte Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen nicht analog für vektorwertige Funktionen formulieren lässt: Finden Sie eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(b) - f(a) \neq f'(\xi)(b-a) \quad \forall \xi \in [a, b].$$

Lösung. *Wir definieren*

$$f(t) := (\cos t\,, \sin t)^T\,, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Es gilt

$$f(2\pi) - f(0) = (-\sin\xi\,, \cos\xi)^T \neq (0\,, 0)^T \quad \forall \xi \in [0, 2\pi].$$