



Analysis II für M, LaG, Ph

5. Tutorium

In der Vorlesung wurde der **Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen** bewiesen: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und seien $c, d \in D$ Punkte, deren Verbindungsstrecke $[c, d] = \{c + t(d - c); t \in [0, 1]\}$ ganz in D enthalten ist. Dann gibt es ein $\xi \in [c, d]$, so dass

$$f(d) - f(c) = f'(\xi)(d - c) \quad (1)$$

gilt. Wir beschäftigen uns in diesem Tutorium mit dem Versuch, den Mittelwertsatz auf vektorwertige Funktionen zu übertragen. Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion. Dann erklären wir das vektorwertige Riemann-Integral durch

$$\int_a^b g(x) dx := \left(\int_a^b g_1(x) dx, \dots, \int_a^b g_m(x) dx \right)^T.$$

Analog definieren wir für eine matrixwertige Funktion $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ (für jedes $x \in [a, b]$ ist $A(x)$ also eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten) mit stetigen Komponentenfunktionen $A_{i,j} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

$$\int_a^b A(x) dx := \left(\int_a^b A_{i,j}(x) dx \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Wir integrieren also komponentenweise und erhalten eine $m \times n$ -Matrix.

T1 Norm-Abschätzung für Integrale

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem \mathbb{R}^m und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a, b]$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx.$$

Hinweis. Verwenden Sie, dass für eine stetige, reellwertige Funktion g auf $[a, b]$ für eine beliebige Folge von Zerlegungen

$$(P_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{a = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{k_n}^n = b\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i=1, \dots, k_n} t_i^n - t_{i-1}^n = 0$$

die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} g(t_i^n)(t_i^n - t_{i-1}^n) = \int_a^b g(x) dx.$$

gilt.

T2 Vektorwertiger Mittelwertsatz

Gegeben seien eine beliebige offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, eine stetig differenzierbare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ und Punkte $c, d \in D$, deren Verbindungsstrecke $[c, d]$ ganz in D liegt. Dann gilt

$$f(d) - f(c) = \left(\int_0^1 J_f(c + t(d - c)) dt \right) (d - c),$$

wobei $J_f(x)$ die Jacobi-Matrix von f in einem Punkt $x \in D$ bezeichnet.

T3 Schrankensatz

Seien $\|\cdot\|_n, \|\cdot\|_m$ Normen auf dem \mathbb{R}^n bzw. auf dem \mathbb{R}^m und sei $\|\cdot\|_{\text{op}}$ die zugehörige Operator- oder Abbildungsnorm bezüglich dieser Normen, d.h., für eine $m \times n$ -Matrix A ist $\|A\|_{\text{op}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_m}{\|x\|_n}$. Sei $K \subseteq D$ eine kompakte, konvexe Menge. Dann gilt für alle $a, b \in K$

$$\|f(b) - f(a)\|_m \leq C \|b - a\|_n$$

mit $C := \sup_{x \in K} \|J_f(x)\|_{\text{op}}$.

T4 Mittelwertsatz nicht analog übertragbar

Zeigen Sie, dass sich der in (1) formulierte Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen nicht analog für vektorwertige Funktionen formulieren lässt: Finden Sie eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(b) - f(a) \neq f'(\xi)(b - a) \quad \forall \xi \in [a, b].$$