Analysis II für M, LaG, Ph

4. Tutorium

Lösungsvorschlag

In diesem Tutorium soll es um die topologischen Begriffe *Zusammenhang* und *Wegzusammenhang* gehen.
Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. M heißt *zusammenhängend*, wenn gilt:
Seien $U_1, U_2 \subseteq M$ relativ offen bzgl. M mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $M = U_1 \cup U_2$. Dann muss entweder $M = U_1$ und $U_2 = \emptyset$ oder $M = U_2$ und $U_1 = \emptyset$.
Eine Menge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für alle $a, b \in W$ einen (stetigen) Weg $\gamma : [0,1] \to W$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$ gibt.

T1 (Weg-)Zusammenhang und Stetigkeit

Man zeige die folgenden Aussagen:

i) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann ist $f(D)$ zusammenhängend.

ii) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend und $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann ist $f(D)$ wegzusammenhängend.

i) Seien $U_1, U_2 \subseteq f(D)$ relativ offen mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = f(D)$. Da f stetig ist, sind dann $f^{-1}(U_1)$ und $f^{-1}(U_2)$ relativ offen bzgl. D mit $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = f^{-1}(U_1 \cap U_2) = \emptyset$ und $f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) = f^{-1}(U_1 \cup U_2) = D$. Da D zusammenhängend ist, ist $f^{-1}(U_1)$ oder $f^{-1}(U_2)$ die leere Menge. Also ist entsprechend U_1 oder U_2 leer und hieraus folgt die Behauptung.

ii) Seien $a, b \in f(D)$ und $x \in f^{-1}(a), y \in f^{-1}(b)$. Dann existiert ein stetiger Weg $\gamma : [0,1] \to D$, der x in D mit y verbindet: $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Da f stetig ist, ist die Komposition $f \circ \gamma : [0,1] \to f(D)$ ein stetiger Weg, der a mit b in $f(D)$ verbindet: $f \circ \gamma(0) = f(x) = a$ und $f \circ \gamma(1) = f(y) = b$.

T2 Zusammenhang vs. Wegzusammenhang

i) Man zeige, dass jede wegzusammenhängende Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ auch zusammenhängend ist.

ii) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x > 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Ist der Graph $M := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}_0^+\}$ zusammenhängend bzw. wegzusammenhängend?

i) Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen M sei nicht zusammenhängend. Dann existieren bezüglich M relativ offene Mengen $U_1 \neq \emptyset \neq U_2$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = M$. Seien $x \in U_1, y \in U_2$. Dann gibt es einen stetigen Weg $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Nun definieren wir

$$V_1 := \gamma([0,1]) \cap U_1 \qquad \text{und} \qquad V_2 := \gamma([0,1]) \cap U_2.$$

Wegen $\gamma([0,1]) \subseteq M$ sind V_1 und V_2 relativ offen bzgl. $\gamma([0,1])$ (Beweis s. unten). Außerdem gilt $V_1 \neq \emptyset \neq V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und $V_1 \cup V_2 = \gamma([0,1])$. Also ist $\gamma([0,1])$ nicht zusammenhängend.
Andererseits ist $[0,1]$ zusammenhängend und γ stetig, also ist $\gamma([0,1])$ nach Aufgabe T1) i) zusammenhängend. (Widerspruch!)
Die Menge M muss demnach zusammenhängend sein.

Beweis zur relativen Offenheit von V_1 bzgl. $\gamma([0,1])$: Die Menge U_1 ist bzgl. M relativ offen. Es gibt also eine offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass $U_1 = O \cap M$. Wegen $\gamma([0,1]) \subseteq M$ und der Definition von V_1 gilt $V_1 = \gamma([0,1]) \cap U_1 = \gamma([0,1]) \cap M \cap O = \gamma([0,1]) \cap O$. Daher ist V_1 relativ offen bzgl. $\gamma([0,1])$.

ii) ***Zusammenhang:*** *Wir zeigen zuerst durch einen Widerspruchsbeweis, dass die angegebene Menge zusammenhängend ist. Angenommen M sei nicht zusammenhängend, dann gäbe es relativ offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq M$ mit $U_1 \neq \emptyset \neq U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = M$. Die Menge $M' := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^+\} \subset M$ ist zusammenhängend als Bild von $\mathbb{R}^+$ unter der stetigen Abbildung (s. Aufgabe T1) i))*

$$x \mapsto (x, f(x)) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2.$$

Also muss entweder $U_1 \cap M' = \emptyset$ oder $U_2 \cap M' = \emptyset$ sein. OBdA sei $U_1 \cap M' = \emptyset$. Dann gilt $U_2 = M'$ und $U_1 = \{(0,0)\}$. Diese Menge U_1 ist aber nicht relativ offen bzgl M, denn sonst würde eine offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}^2$ existieren mit $U_1 = M \cap O$. Die Menge O wäre eine Umgebung von $(0,0)$, würde also noch eine ε-Umgebung von $(0,0)$ enthalten. Also würde O außer $(0,0)$ auch noch andere Punkte von M enthalten. (Z.B. konvergiert die Folge $\left((\frac{1}{n\pi}, 0)\right) \subset M$ gegen $(0,0)$.) Daher gilt $U_1 \neq M \cap O$. (Widerspruch zur Konstruktion von O!) Die Menge M ist also zusammenhängend.

Wegzusammenhang: *Wir führen wieder einen Widerspruchsbeweis. Dazu nehmen wir an, es gebe einen Weg $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = (\frac{1}{\pi}, 0) \in M$ und $\gamma(1) = (0,0)$. Weiter sei $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die erste Komponente: $p(x,y) := x$. Zuerst benötigen wir die Stetigkeit der Projektion p. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für alle $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x,y) - (x',y')\| < \varepsilon$*

$$|p(x,y) - p(x',y')| = |x - x'| \leq \|(x,y) - (x',y')\| < \varepsilon.$$

Die Projektion p und damit auch die Komposition $p \circ \gamma$ sind also stetig. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt die Abbildung $p \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ jeden Wert zwischen 0 und $\frac{1}{\pi}$ an. Daher gilt $M \cap [0, \frac{1}{\pi}] \times [-1,1] \subseteq \gamma([0,1])$. ("Von $(\frac{1}{\pi}, 0)$ aus gesehen muss das Bild des Weges alle linken Elemente von M enthalten.")
Betrachten wir nun die Folge $\left((\frac{2}{\pi(4k+1)}, 1)\right)_{k \in \mathbb{N}} \subset \gamma([0,1])$. Diese konvergiert in $\mathbb{R}^2$ gegen $(0,1) \notin \gamma([0,1])$. Damit wäre $\gamma([0,1])$ nicht abgeschlossen und daher nicht kompakt. (Widerspruch! Stetiges Bild kompakter Mengen ist wieder kompakt) Also ist M nicht wegzusammenhängend.

T3 (Weg-)Zusammenhang von offenen Mengen

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Beweise, dass M genau dann wegzusammenhängend ist, wenn M zusammenhängend ist.

Wenn die Menge M wegzusammenhängend ist, dann ist M nach Aufgabe T2) i) auch zusammenhängend. Die Umkehrung zeigen wir wie folgt. Angenommen die Menge M sei nicht wegzusammenhängend. Dann gibt es zwei Punkte $x, y \in M$, welche durch keinen Weg in M miteinander verbunden werden können. Wir definieren nun die Mengen

$$U_1 := \{a \in M \mid \text{es gibt einen stetigen Weg } \gamma : [0,1] \to M \text{ mit } \gamma(0) = x, \gamma(1) = a\}$$
$$U_2 := \{b \in M \mid \text{es gibt keinen stetigen Weg } \gamma : [0,1] \to M \text{ mit } \gamma(0) = x, \gamma(1) = b\}.$$

Die Eigenschaften $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = M$ sind klar.
Wir beweisen nun, dass U_1 und U_2 relativ offen bzgl M sind. Hierfür benötigen wir das Argument, dass ε-Umgebungen stets wegzusammenhängend sind (Beweis s. weiter unten). Wir wählen ein beliebiges $a \in U_1 \subset M$. Da M offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subset M$. Sei zudem $\tilde{a} \in B_\varepsilon(a)$. Es gibt nun einen Weg $\gamma_1 : [0,1] \to U_1$, der x mit a verbindet, und einen Weg $\gamma_2 : [0,1] \to B_\varepsilon(a)$, der a mit $\tilde{a}$ verbindet. Daraus lässt sich nun sehr leicht ein Weg konstruieren, welcher x mit $\tilde{a}$ verbindet:

$$\gamma_0 : [0,1] \to M, \qquad \gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_2(2t-1) & t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Nach Definition von U_1 liegt $\tilde{a}$ in U_1 und daher gilt $B_\varepsilon(a) \subseteq U_1$. Die Menge U_1 ist also offen und weil M offen ist auch relativ offen bzgl M.
Nun noch zur Offenheit von U_2. Wir wählen ein $b \in U_2$. Da M offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(b) \subset M$. Angenommen es gäbe nun einen Punkt $\tilde{b} \in B_\epsilon(b)$, der sich stetig mit x verbinden lässt. Dann liese sich auch nach obiger Methode b mit x verbinden. (Widerspruch zur Definition von U_2!) Daher liegt $\tilde{b}$ in U_2 und somit ist die Menge U_2 offen - und auch relativ offen bzgl M.
Da U_1 und U_2 nicht-leer sind, ist die Menge M also *nicht zusammenhängend.*

Beweis, dass ε-Umgebungen stets wegzusammenhängend sind: OBdA betrachten wir die Nullumgebung $B_\varepsilon(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \varepsilon\}$ für ein $\varepsilon > 0$. Seien nun $a, b \in B_\varepsilon(0)$. Wir definieren den offensichtlich stetigen Weg

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n \quad \text{mit } \gamma(t) := tb + (1-t)a.$$

Für diesen gilt $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$. Außerdem gilt für alle $t \in [0,1]$

$$\|\gamma(t)\| = \|tb + (1-t)a\| \leq t\|b\| + (1-t)\|a\| < t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon,$$

also $\gamma(t) \in B_\varepsilon(0)$. Der Weg γ liegt also in B_ε und verbindet a und b. Die ε-Umgebung ist demnach wegzusammenhängend.