Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Jennifer Prasiswa
Christian Komo
Raphael Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13.05.2009

Analysis II für M, LaG, Ph

4. Tutorium

In diesem Tutorium soll es um die topologischen Begriffe *Zusammenhang* und *Wegzusammenhang* gehen.
Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. M heißt *zusammenhängend*, wenn gilt:
Seien $U_1, U_2 \subseteq M$ relativ offen bzgl. M mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $M = U_1 \cup U_2$. Dann muss entweder $M = U_1$ und $U_2 = \emptyset$ oder $M = U_2$ und $U_1 = \emptyset$.
Eine Menge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für alle $a, b \in W$ einen (stetigen) Weg $\gamma : [0,1] \to W$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$ gibt.

T1 (Weg-)Zusammenhang und Stetigkeit
Man zeige die folgenden Aussagen:

i) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann ist $f(D)$ zusammenhängend.
ii) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend und $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann ist $f(D)$ wegzusammenhängend.

T2 Zusammenhang vs. Wegzusammenhang

i) Man zeige, dass jede wegzusammenhängende Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ auch zusammenhängend ist.
ii) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x > 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Ist der Graph $M := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}_0^+\}$ zusammenhängend bzw. wegzusammenhängend?

T3 (Weg-)Zusammenhang von offenen Mengen
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Beweise, dass M genau dann wegzusammenhängend ist, wenn M zusammenhängend ist.