Analysis II für M, LaG, Ph

3. Tutorium

Lösungsvorschlag

T1 **L^p-Integralnorm für stetige Funktionen**

Sei $C([a,b])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ und sei $1 < p < \infty$. Wir definieren (man mache sich klar, warum das Integral existiert)

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in C([a,b]).$$

Zeigen Sie, dass $\| \cdot \|_p$ eine Norm auf $C([a,b])$ definiert.

Hinweis. In Tutorium 15 wurde die **Hölder-Ungleichung** bewiesen: Für $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $f, g \in C([a,b])$ gilt

$$\int_a^b |fg| \, dx \le \left(\int_a^b |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^{p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

Weiterhin gilt die Abschätzung

$$|f+g|^p \le |f| \, |f+g|^{p-1} + |g| \, |f+g|^{p-1}.$$

Lösung. *Wir müssen die drei in der Definition des Begriffs Norm geforderten Eigenschaften zeigen (siehe Seite 3 im Ana2-Skript über mehrdimensionale Differentialrechnung). Wir beginnen mit dem Nachweis der Definitheit, d.h. mit der Eigenschaft (i). Wir führen einen indirekten Beweis und nehmen daher an, es gebe eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$f \neq 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b |f(x)|^p \, dx = 0. \tag{1}$$

Aus $f \neq 0$ folgt die Existenz eines $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0$. Wir nehmen an, dass $x_0 \in]a,b[$ gilt, ansonsten beschränke man sich in der folgenden Argumentation auf links- bzw. rechtsseitige Umgebungen. Da f stetig ist, existiert eine ϵ-Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ mit

$$|f(x)| \ge \frac{|f(x_0)|}{2} \quad \forall x \in U_\epsilon(x_0).$$

Es folgt mit der Monotonie des Integrals

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx \ge \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} |f(x)|^p \, dx \ge \frac{\epsilon |f(x_0)|^p}{2^p} > 0.$$

Aus diesem Widerspruch zur Annahme (1) folgt die Eigenschaft (i). Der Nachweis der Eigenschaft (ii) folgt sofort aus der Linearität des Integrals. Um (iii) zu zeigen, integrieren wir die im Hinweis gegebene Abschätzung und verwenden die Hölder-Ungleichung. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_a^b |f+g|^p \, dx &\le \int_a^b |f| \, |f+g|^{p-1} \, dx + \int_a^b |g| \, |f+g|^{p-1} \, dx \\ &\le \left(\int_a^b |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_a^b |g|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_a^b |f+g|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned} \tag{2}$$

In dieser Rechnung wurde verwendet, dass $(p-1)p' = p$ ist. Falls $\int_a^b |f+g|^p\,dx = 0$ ist, gilt die zu zeigende Ungleichung trivialerweise. Sonst teilen wir in (2) durch $(\int_a^b |f+g|^p\,dx)^{\frac{1}{p'}}$ und erhalten unter Verwendung von $1 - \frac{1}{p'} = \frac{1}{p}$ die gewünschte Dreiecksungleichung

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

T2 Cantor-Menge

Ausgehend von dem Intervall $C_0 := [0,1]$ konstruieren wir induktiv Teilmengen $C_k \subseteq C_0$ ($k \in \mathbb{N}$) dadurch, dass wir aus allen abgeschlossenen Teilintervallen, aus denen C_k besteht, das mittlere Drittel entfernen, um C_{k+1} zu erhalten. Beispielsweise ist $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ und man erhält C_2 dadurch, dass man aus $[0, \frac{1}{3}]$ das offene Intervall $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ und aus $[\frac{2}{3}, 1]$ das offene Intervall $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$ entfernt. Insgesamt ist

$$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

Wir definieren die **Cantor-Menge** durch $C := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C_k$.
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt die Darstellung

$$C_k = \bigcup_{(a_1,\ldots,a_k) \in \{0,2\}^k} \left[\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^k} \right].$$

(b) C ist kompakt.

(c) Es gilt

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^\infty \frac{a_i}{3^i} \mid a_i \in \{0,2\}\, \forall i \in \mathbb{N} \right\}.$$

(d) C ist überabzählbar.

Ausblick. Man kann zeigen (siehe Analyis IV), dass die Cantor-Menge klein in dem Sinne ist, dass sie eine sogenannte Lebesguesche Nullmenge ist. Äquivalent dazu ist, dass zu gegebenem $\epsilon > 0$ eine Folge von offenen Intervallen (I_k) existiert, so dass mit $I_k =]a_k, b_k[$

$$C \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^\infty (b_k - a_k) \leq \epsilon.$$

erfüllt ist.

Lösung.

(a) *Betrachten wir ein Intervall aus C_k der Form*

$$\left[\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^k} \right]$$

mit $a_i \in \{0,2\}$ für $i = 1, \ldots, k$. Aus diesem Intervall entstehen durch den "Cantorschen Drittelungsprozess" für C_{k+1} die beiden Intervalle

$$\left[\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^{k+1}} \right] \quad \text{und} \quad \left[\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^{k+1}}, \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+1}} \right].$$

Damit erhält man

$$C_{k+1} = \bigcup_{(a_1,\ldots,a_k)\in\{0,2\}^k} \left[\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^{k+1}}\right] \bigcup \left[\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^{k+1}}, \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+1}}\right]$$
$$= \bigcup_{(a_1,\ldots,a_{k+1})\in\{0,2\}^{k+1}} \left[\sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^{k+1}}\right].$$

(b) *$C \subseteq [0,1]$ ist beschränkt. Aus (a) folgt, dass C_k die endliche Vereinigung von abgeschlossenen Intervallen ist und somit selbst abgeschlossen ist. Somit ist C als Schnitt von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen. Da $C \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt ist, ist C kompakt.*

(c) *Wir betrachten zuerst ein $x = \sum_{i=1}^\infty \frac{a_i}{3^i}$ mit $a_i \in \{0,2\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir erhalten für $k \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} x - \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i} &= \sum_{i=k+1}^\infty \frac{a_i}{3^i} \\ &\leq \sum_{i=k+1}^\infty \frac{2}{3^i} \\ &= 2\left(\sum_{i=0}^\infty \frac{1}{3^i} - \sum_{i=0}^k \frac{1}{3^i}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}}{1-\frac{2}{3}}\right) \\ &= 2(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1})) = \frac{1}{3^k}. \end{aligned}$$

Damit gilt $x \in C_k$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$.
Andersrum, sei $x \in C_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$x \in \left[\sum_{i=1}^k \frac{a_i^k}{3^i}, \sum_{i=1}^k \frac{a_i^k}{3^i} + \frac{1}{3^k}\right] \text{ mit } a_1^k, \ldots, a_k^k \in \{0,2\}.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dass die a_i^k von $k \in \mathbb{N}$ unabhängig sind. Somit existiert eine Folge (a_i) mit $a_i \in \{0,2\}$ für $i \in \mathbb{N}$ mit

$$x \in \left[\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^k}\right]$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies impliziert

$$\left| x - \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i} \right| < \frac{1}{3^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

und somit $x = \sum_{i=1}^\infty \frac{a_i}{3^i}$.

(d) ***Lösungsmöglichkeit 1.*** *Diese Argumentation beruht auf dem* Cantorschen Diagonalverfahren. *Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen daher an, es gebe eine surjektive Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to C$. Wir schreiben*

$$\phi(k) = \sum_{i=1}^\infty \frac{a_i^k}{3^i} \quad \text{mit } (a_i^k)_{i\in\mathbb{N}}, a_i^k \in \{0,2\}.$$

Um einen Widerspruch zu erhalten, definieren wir $d := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{3^i}$ *mit*

$$d_i := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } a_i^i = 2 \\ 2\,, & \text{falls } a_i^i = 0 \end{cases}$$

Nach Konstruktion von d_k *gilt* $|d_k - a_k^k| = 2$ *und folglich* $\phi(k) \neq d$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$. *Da* $d \in C$ *gilt, kann aber* ϕ *somit nicht surjektiv sein und wir haben bewiesen, dass* C *überabzählbar ist.*

Lösungsmöglichkeit 2. *Aus der 4-ten Übung in Analysis 1 ist bekannt, dass die Menge*

$$M := \{\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \{0,1\}\, \forall n \in \mathbb{N} \,\}$$

überabzählbar ist. Wir definieren

$$\phi : C \to M \qquad (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\frac{a_i}{2}\right)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Da ϕ *surjektiv ist, ist* C *überabzählbar.*