Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Christian Komo
Jennifer Prasiswa
Raphael Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6.05.2009

Analysis II für M, LaG, Ph

3. Tutorium

T1 **L^p-Integralnorm für stetige Funktionen**
Sei $C([a,b])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ und sei $1 < p < \infty$. Wir definieren (man mache sich klar, warum das Integral existiert)

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in C([a,b]).$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $C([a,b])$ definiert.
Hinweis. In Tutorium 15 wurde die **Hölder-Ungleichung** bewiesen: Für $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $f, g \in C([a,b])$ gilt

$$\int_a^b |fg| \, dx \le \left(\int_a^b |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^{p'} \, dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Weiterhin gilt die Abschätzung

$$|f+g|^p \le |f| \, |f+g|^{p-1} + |g| \, |f+g|^{p-1}.$$

T2 **Cantor-Menge**
Ausgehend von dem Intervall $C_0 := [0,1]$ konstruieren wir induktiv Teilmengen $C_k \subseteq C_0$ $(k \in \mathbb{N})$ dadurch, dass wir aus allen abgeschlossenen Teilintervallen, aus denen C_k besteht, das mittlere Drittel entfernen, um C_{k+1} zu erhalten. Beispielsweise ist $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ und man erhält C_2 dadurch, dass man aus $[0, \frac{1}{3}]$ das offene Intervall $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ und aus $[\frac{2}{3}, 1]$ das offene Intervall $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$ entfernt. Insgesamt ist

$$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

Wir definieren die **Cantor-Menge** durch $C := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C_k$.
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt die Darstellung

$$C_k = \bigcup_{(a_1,\ldots,a_k) \in \{0,2\}^k} \left[\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^k}\right].$$

(b) C ist kompakt.

(c) Es gilt

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^\infty \frac{a_i}{3^i} \;\middle|\; a_i \in \{0,2\} \, \forall i \in \mathbb{N} \right\}.$$

(d) C ist überabzählbar.

Ausblick. Man kann zeigen (siehe Analyis IV), dass die Cantor-Menge klein in dem Sinne ist, dass sie eine sogennante Lebesguesche Nullmenge ist. Äquivalent dazu ist, dass zu gegebenem $\epsilon > 0$ eine Folge von offenen Intervallen (I_k) existiert, so dass mit $I_k =]a_k, b_k[$

$$C \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) \leq \epsilon.$$

erfüllt ist.