Analysis II für M, LaG, Ph

2. Tutorium
Lösungsvorschlag

T1 Berechnung eines uneigentlichen Integrals

Wir wissen nach der 1. Übung (G3)a)), dass das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

existiert. Bestimme nun den Wert dieses Integrals.
(*Hinweis:* Schreibe den Integranden auf $[-(n+\frac{1}{2})\pi, (n+\frac{1}{2})\pi]$ um als ein Produkt mit dem Dirichlet-Kern.)

Die Substitution $x =: (n+\frac{1}{2})t$ *führt zu*

$$I_n := \int_{-(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} dt = \pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} D_n(t) dt.$$

Die durch $f(0) := 1$ *ergänzte Funktion* $f(t) = \frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}$ *ist in* 0 *differenzierbar, denn der entsprechende Differentialquotient existiert:*

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} - 1}{t} \\ & \lim_{t\to 0} \frac{2\sin\frac{t}{2} - t}{t^2} = \textit{(L'Hospital)} \lim_{t\to 0} -\frac{\sin\frac{t}{2}}{4} = 0. \end{aligned}$$

Mit dem Satz 11.3 (Skript!) folgt also

$$I_n = \pi \cdot s_n(f, 0) \to \pi \cdot f(0) = \pi.$$

T2 Satz von Plancherel

Sei $f \in V$. Man zeige, dass die Bessel-Ungleichung sogar eine Gleichung ist, d.h.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 = \|f\|_2^2,$$

falls

i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\pi \le x < a, \\ 0 & \text{für } a \le x < \pi, \end{cases}$ mit $a \in [-\pi, \pi]$.

ii) $f\big|_{[-\pi,\pi]}$ eine Treppenfunktion ist, d.h. es gibt Punkte $-\pi = x_0 < x_1 < ... < x_n = \pi$ derart, dass $f\big|_{[-\pi,\pi]}$ in jedem offenen Intervall (x_{k-1}, x_k) mit $k = 1, ..., n$ konstant ist.
(*Hinweis:* Mache Dir aus dem Beweis der Bessel-Ungleichung klar, dass Gleichheit genau dann gilt wenn $\|f - S_n\|_2$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.)

Nun lässt sich jede Funktion $f \in V$ durch solche Treppenfunktionen approximieren. Damit kann man zeigen, dass die Bessel-Ungleichung für alle $f \in V$ eine Gleichung ist; das ist der sog. *Satz von Plancherel.* Für den Beweis sei auf Forster, Analysis I, §23 verwiesen.

i) *Die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k dieser Funktion lauten*

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a+\pi}{2\pi}, \\ c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{a} e^{-ikx}dx = \frac{ie^{ik\pi}}{2\pi k}\left(e^{-ik(a+\pi)}-1\right) \qquad \text{für } k \neq 0. \end{aligned}$$

Wegen $|c_k| = |c_{-k}|$ gilt für $k \neq 0$

$$\begin{aligned} |c_k|^2 = |c_k| \cdot |c_{-k}| &= \frac{1}{4\pi^2 k^2}\left|1-e^{ik(a+\pi)}\right|\left|1-e^{-ik(a+\pi)}\right| \\ &= \frac{1-\cos k(a+\pi)}{2\pi^2k^2} = \frac{1-(-1)^k\cos k(a)}{2\pi^2k^2}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 &= \frac{(a+\pi)^2}{4\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k\cos ka}{\pi^2k^2} \\ &= \frac{a^2+2\pi a+\pi^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos ka \\ &= \frac{a^2+2\pi a+\pi^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{a^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{a+\pi}{2\pi}, \end{aligned}$$

wobei die Gleichungen $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (s. Skript Seite 11-9, Beispiel 2) und $a^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos ka$ (s. 2. Übung, G4) verwendet wurden. Es gilt deshalb

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = \frac{a+\pi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \|f\|_2^2.$$

ii) *Ist $f\Big|_{[-\pi,\pi]}$ eine beliebige Treppenfunktion, so gibt es Funktionen $f_1, ..., f_r$ der in i) beschriebenen Gestalt und Konstanten $\gamma_1, ..., \gamma_r$, so dass*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{r}\gamma_j f_j(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit evtl. Ausnahmen der Sprungstellen x_k. Sind S_n bzw. S_{jn} die n-ten Partialsummen der Fourier-Reihen von f bzw. f_j, so gilt

$$S_n = \sum_{j=1}^{r}\gamma_j S_{jn},$$

also

$$\|f-S_n\|_2 = \|\sum_{j=1}^{r}\gamma_j(f_j-S_{jn})\|_2 \leq \sum_{j=1}^{r}|\gamma_j|\cdot\|f_j-S_{jn}\|_2.$$

Nach Teil i) konvergiert dies für $n \to \infty$ gegen 0.

T3 Fourier-Koeffizienten

Gibt es eine Funktion $f \in V$, deren Fourier-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

ist? Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?

Nehmen wir an, es gäbe eine Funktion $f \in V$ mit $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Die komplexen Fourier-Koeffizienten sind dann

$$\hat{f}_0 = 0, \hat{f}_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = -\frac{i}{2\sqrt{k}}, k \in \mathbb{N} \quad \textit{und} \quad \hat{f}_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = \frac{i}{2\sqrt{k}}, k \in \mathbb{N}.$$

Nach der Bessel-Ungleichung erhalten wir nun

$$\|f\|_2^2 \geq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Die Funktion f ist also nicht integrierbar und daher nicht in V enthalten. (Widerspruch zur Voraussetzung!) Diese Reihe ist also keine Fourier-Reihe einer Funktion $f \in V$!
Und das obwohl die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Denn die Funktionenfolge (g_n) mit $g_n(x) := \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ monoton fallend und konvergiert gleichmäßig gegen 0. Zudem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $[\delta, 2\pi - \delta]$ mit $0 < \delta < 2\pi$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \sin nx\right| = \left|\operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right| \leq \textit{ (s. 1.Tut. T3(b) Lsg.) } \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}.$$

Nach dem Dirichlet-Kriterium (s. Tutorium 1, T3) konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ also auf jedem Intervall $[2\pi k + \delta, 2\pi(k+1) - \delta]$ mit $\delta > 0$ und $k \in \mathbb{Z}$ gleichmäßig. In den Punkten $x = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ konvergiert die Reihe trivialerweise.