Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Jennifer Prasiswa
Christian Komo
Raphael Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

29.04.2009

Analysis II für M, LaG, Ph

2. Tutorium

T1 Berechnung eines uneigentlichen Integrals

Wir wissen nach der 1. Übung (G3)a)), dass das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

existiert. Bestimme nun den Wert dieses Integrals.
(*Hinweis:* Schreibe den Integranden auf $[-(n+\frac{1}{2})\pi, (n+\frac{1}{2})\pi]$ um als ein Produkt mit dem Dirichlet-Kern.)

T2 Satz von Plancherel

Sei $f \in V$. Man zeige, dass die Bessel-Ungleichung sogar eine Gleichung ist, d.h.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 = \|f\|_2^2,$$

falls

i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\pi \leq x < a, \\ 0 & \text{für } a \leq x < \pi, \end{cases} \qquad \text{mit } a \in [-\pi, \pi].$

ii) $f\Big|_{[-\pi,\pi]}$ eine Treppenfunktion ist, d.h. es gibt Punkte $-\pi = x_0 < x_1 < ... < x_n = \pi$ derart, dass $f\Big|_{[-\pi,\pi]}$ in jedem offenen Intervall (x_{k-1}, x_k) mit $k = 1, ..., n$ konstant ist.
(*Hinweis:* Mache Dir aus dem Beweis der Bessel-Ungleichung klar, dass Gleichheit genau dann gilt wenn $\|f - S_n\|_2$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.)

Nun lässt sich jede Funktion $f \in V$ durch solche Treppenfunktionen approximieren. Damit kann man zeigen, dass die Bessel-Ungleichung für alle $f \in V$ eine Gleichung ist; das ist der sog. *Satz von Plancherel.* Für den Beweis sei auf Forster, Analysis I, §23 verwiesen.

T3 Fourier-Koeffizienten

Gibt es eine Funktion $f \in V$, deren Fourier-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

ist? Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?