Analysis II für M, LaG, Ph

1. Tutorium
Lösungsvorschlag

Wir beschäftigen uns in diesem Tutorium mit der Konvergenz von nicht absolut konvergenten Reihen der Form $\sum_k a_k f_k$. Dabei benutzen wir die Methode der partiellen Summation nach N. H. Abel, die als ein diskretes Analogon zur partiellen Integration betrachtet werden kann.

Abelsche partielle Summation. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von reellen oder komplexen Zahlen. Mit

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

gilt dann:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k f_k &= A_1 f_1 + (A_2 - A_1) f_2 + \ldots + (A_n - A_{n-1}) f_n \\ &= A_1(f_1 - f_2) + A_2(f_2 - f_3) + \ldots + A_{n-1}(f_{n-1} - f_n) + A_n f_n.\end{aligned} \tag{1}$$

T1 Dirichlet-Kriterium für Zahlenreihen.

Beweise mit Hilfe der Abelschen partiellen Summation das folgende Kriterium.
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, die den folgenden drei Bedingungen genügen:

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0.

(iii) Es existiert eine Schranke $M > 0$ mit

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k$ konvergent.

Lösung. *Wir erhalten mit der Abelschen partiellen Summation (1) für $m > n > 1$*

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{m} a_k f_k &= \sum_{k=1}^{m} a_k f_k - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} A_k(f_k - f_{k+1}) + A_m f_m - \left(\sum_{k=1}^{n-1} A_k(f_k - f_{k+1}) + A_n f_n\right) \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} A_k(f_k - f_{k+1}) + A_m f_m - A_n f_n.\end{aligned}$$

Aus (i) und (ii) folgt $f_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit $f_k - f_{k+1} \geq 0$ folgt

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k f_k\right| &\leq \sum_{k=n}^{m-1} |A_k||f_k - f_{k+1}| + |A_m||f_m| + |A_n||f_n| \\ &\leq M \sum_{k=n}^{m-1} |f_k - f_{k+1}| + M(f_m + f_n) \\ &= M \sum_{k=n}^{m-1} (f_k - f_{k+1}) + M(f_m + f_n) \\ &= M(f_n - f_m) + M(f_m + f_n) = 2M f_n.\end{aligned} \tag{2}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ *finden wir zu* $\epsilon > 0$ *ein* $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *mit*

$$|f_n| \le \frac{\epsilon}{2M} \quad \forall n \ge n_0.$$

Aus (2) folgt für $m > n > 1$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k f_k\right| \le 2M f_n \le \epsilon.$$

Das Cauchysche Konvergenzkriterium liefert nun die Behauptung.

T2 Anwendung des Dirichlet-Kriteriums.

Seien $e^{\frac{2\pi ik}{3}}$, $k = 0, 1, 2$, die dritten (komplexen) Einheitswurzeln. Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi ik}{3}}}{\sqrt{k}}.$$

Kann man die Konvergenz der obigen Reihe auch mit dem Majorantenkriterium zeigen?

Lösung. *Wir setzen für* $k \in \mathbb{N}$

$$f_k := \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \textit{und} \quad a_k := e^{\frac{2\pi ik}{3}}.$$

Es gilt $a_{k+3} = a_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *und* $\sum_{k=1}^{3} e^{\frac{2\pi ik}{3}} = 0$. *Offensichtlich ist* (f_k) *eine monoton fallende Nullfolge und man erhält*

$$\left|\sum_{k=1}^{l} e^{\frac{2\pi ik}{3}}\right| = \begin{cases} 0\,, & \textit{falls } l = 3m\,, m \in \mathbb{N};\\ |e^{\frac{2\pi i}{3}}|\,, & \textit{falls } l = 3m+1\,, m \in \mathbb{N};\\ |e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}}|\,, & \textit{falls } l = 3m+2\,, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Aus dieser Abschätzung erhält man $|\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2\pi ik}{3}}| \le 2$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Das Dirichlet-Kriterium liefert die Konvergenz der Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi ik}{3}}}{\sqrt{k}}$.
Aus $|e^{ix}| = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *folgt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{e^{\frac{2\pi ik}{3}}}{\sqrt{k}}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty.$$

Somit kann man die Konvergenz der besagten Reihe nicht mit dem Majorantenkriterium zeigen, da die gegebene Reihe nicht absolut konvergiert.

T3 Dirichlet-Kriterium für Funktionenreihen.

Nun wollen wir das in T1 bewiesene Kriterium auf den Fall von Funktionenfolgen (f_n), (a_n) übertragen, um gleichmäßige Konvergenz bei Reihen der Form $\sum_k a_k f_k$ zu zeigen.

(a) Betrachten Sie Ihren Beweis von T1 und versuchen Sie, das folgende Kriterium zu beweisen.
Dirichlet-Kriterium. Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexe Funktionen auf $D \subseteq \mathbb{R}$, die folgende drei Bedingungen erfüllen.

(i) Für jedes $x \in D$ ist die reelle Zahlenfolge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf D gegen 0.

(iii) Es existiert eine Schranke $M > 0$ mit

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \right\|_\infty \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist die (komplexwertige) Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k$ auf D gleichmäßig konvergent.
Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm auf D, also

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

(b) Wenden Sie das in (a) bewiesene Kriterium an, um die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k}$$

auf jedem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ mit $0 < \delta < \pi$ zu zeigen.

Lösung.

(a) Aus (2) folgt für beliebiges $x \in D$ und $m > n > 1$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k(x) f_k(x) \right| \leq 2M f_n(x). \tag{3}$$

Aufgrund von (ii) finden wir zu $\epsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2M} \quad \forall n \geq n_0.$$

Aus (3) erhält man damit

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k f_k \right\|_\infty \leq 2M \|f_n\|_\infty \leq \epsilon.$$

Nach dem Cauchy-Kriterium (siehe Satz auf Seite 141 im Ana-1-Skript) folgt die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k$.

(b) Wir setzen für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$

$$f_k := \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad a_k(x) := \cos(kx).$$

Man sieht, dass die Voraussetzungen (i) und (ii) des Dirichlet-Kriteriums in T3(a) erfüllt sind. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} \right| &= \left| e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} \right| \\
&= \left| \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \right| \\
&\leq \frac{2}{|e^{i\frac{x}{2}}||1 - e^{ix}|} \\
&= \frac{2}{|e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}|} \\
&= \frac{2}{|2i \sin(\frac{x}{2})|} \leq \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}.
\end{aligned}$$

In dieser Umformung wurde mehrmals verwendet, dass $|e^{iy}| = 1$ *für alle* $y \in \mathbb{R}$ *ist und die bekannte Summenformel für die geometrische Reihe:*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Weiterhin folgt aus der Euler-Formel $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ *für beliebiges* $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin(x).$$