Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Christian Komo
Jennifer Prasiswa
Raphael Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

22.04.2009

Analysis II für M, LaG, Ph

1. Tutorium

Wir beschäftigen uns in diesem Tutorium mit der Konvergenz von nicht absolut konvergenten Reihen der Form $\sum_k a_k f_k$. Dabei benutzen wir die Methode der partiellen Summation nach N. H. Abel, die als ein diskretes Analogon zur partiellen Integration betrachtet werden kann.

Abelsche partielle Summation. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von reellen oder komplexen Zahlen. Mit

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

gilt dann:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k f_k &= A_1 f_1 + (A_2 - A_1) f_2 + \ldots + (A_n - A_{n-1}) f_n \\ &= A_1(f_1 - f_2) + A_2(f_2 - f_3) + \ldots + A_{n-1}(f_{n-1} - f_n) + A_n f_n.\end{aligned} \tag{1}$$

T1 Dirichlet-Kriterium für Zahlenreihen.
Beweise mit Hilfe der Abelschen partiellen Summation das folgende Kriterium.
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, die den folgenden drei Bedingungen genügen:

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0.

(iii) Es existiert eine Schranke $M > 0$ mit

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k$ konvergent.

T2 Anwendung des Dirichlet-Kriteriums.
Seien $e^{\frac{2\pi i k}{3}}$, $k = 0, 1, 2$, die dritten (komplexen) Einheitswurzeln. Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi i k}{3}}}{\sqrt{k}}.$$

Kann man die Konvergenz der obigen Reihe auch mit dem Majorantenkriterium zeigen?

T3 Dirichlet-Kriterium für Funktionenreihen.
Nun wollen wir das in T1 bewiesene Kriterium auf den Fall von Funktionenfolgen (f_n) , (a_n) übertragen, um gleichmäßige Konvergenz bei Reihen der Form $\sum_k a_k f_k$ zu zeigen.

(a) Betrachten Sie Ihren Beweis von T1 und versuchen Sie, das folgende Kriterium zu beweisen.
Dirichlet-Kriterium. Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexe Funktionen auf $D \subseteq \mathbb{R}$, die folgende drei Bedingungen erfüllen.

(i) Für jedes $x \in D$ ist die reelle Zahlenfolge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf D gegen 0.

(iii) Es existiert eine Schranke $M > 0$ mit

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \right\|_\infty \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist die (komplexwertige) Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k$ auf D gleichmäßig konvergent.
Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm auf D, also

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in D} |f(x)|.$$

(b) Wenden Sie das in (a) bewiesene Kriterium an, um die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k}$$

auf jedem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ mit $0 < \delta < \pi$ zu zeigen.