Analysis II für M, LaG, Ph

0. Tutorium

Lösungsvorschlag

T1 Substitution und Partielle Integration

i) Berechne die folgenden Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}dx \quad \text{und} \quad \int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}dx.$$

ii) Zeige die Rekursionsformel

$$\int \ln^n(x)dx = x\ln^n(x) - n\int \ln^{n-1}(x)dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Mit der Substitution $t := \sin(x)$ folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(t)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Mit der Substitution $t := \ln(x)$ erhalten wir

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x} = \int_1^2 tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{3}{2}.$$

Alternativer Beweis: Bei genauerem Betrachten erkennen wir den Integranden als Ableitung und erhalten daher

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{2}\left(\ln^2(x)\right)' dx = \frac{1}{2}\left(\ln^2(e^2) - \ln^2(e)\right) = \frac{3}{2}.$$

ii) Beweis mit Induktion: Wir beweisen die Gleichung durch vollständige Induktion. Aus der Vorlesung (AnaI) ist die Stammfunktion des Logarithmus bekannt:

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x.$$

Damit erhalten wir den Induktionsanfang bei $n = 1$:

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x = x\ln(x) - \int 1dx.$$

Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ integrieren wir partiell:

$$\begin{aligned}\int \ln^{n+1}(x)dx &= (x\ln(x) - x)\ln^n(x) - \int (x\ln(x) - x)\, n\ln^{n-1}(x)\frac{dx}{x} \\ &= x\ln^{n+1}(x) - x\ln^n(x) - n\int \ln^n(x)dx + n\int \ln^{n-1}(x)dx \\ &= x\ln^{n+1}(x) - (n+1)\int \ln^n(x)dx.\end{aligned}$$

Alternativer Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir mit partieller Integration

$$\int \ln^n(x)dx = \int 1\cdot\ln^n(x)dx = x\ln^n(x) - n\int x\cdot\frac{\ln^{n-1}(x)}{x}dx.$$

Noch ein Alternativer Beweis: Die angegebene Rekursionsformel sagt aus, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die rechte Seite der Gleichung eine Stammfunktion von $\ln^n(x)$ ist. Es genügt also zu zeigen, dass die Ableitung der rechten Seite gerade $\ln^n(x)$ ist. ...

T2 Intervallzerlegung und Integrale

Sei $[a,c] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a < b < c$. Weiter sei $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche auf den Intervallen $[a,b]$ und $[b,c]$ Riemann-integrierbar ist. Man zeige, dass f auf dem Intervall $[a,c]$ Riemann-integrierbar ist und dass gilt

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt Partitionen $P_1 \subset [a,b]$ und $P_2 \subset [b,c]$, so dass

$$U(P_1, f) - L(P_1, f) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$U(P_2, f) - L(P_2, f) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nun ist $P_1 \cup P_2$ eine Partition des Intervalls $[a,c]$ mit

$$\begin{aligned} U(P_1 \cup P_2, f) - L(P_1 \cup P_2, f) = &\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x_i \sup_{x_i - 1 \le x \le x_i} f(x)\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(\Delta x_j \sup_{x_j - 1 \le x \le x_j} f(x)\right)\right) \\ &- \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x_i \inf_{x_i - 1 \le x \le x_i} f(x)\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(\Delta x_j \inf_{x_j - 1 \le x \le x_j} f(x)\right)\right) \\ &= U(P_1, f) - L(P_1, f) + U(P_2, f) - L(P_1, f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Die Funktion ist also auf dem Intervall $[a,c]$ Riemann-integrierbar. Es bleibt noch

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

zu zeigen. Sei hierfür $\delta > 0$. Dann gibt es Partitionen $\tilde{P}_1 \subset [a,b]$ und $\tilde{P}_2 \subset [b,c]$ mit

$$\begin{aligned} \int_a^b f + \int_b^c f - \delta &< L(\tilde{P}_1, f) + L(\tilde{P}_2, f) = L(\tilde{P}_1 \cup \tilde{P}_2, f) \\ &\le \int_a^c f \le U(\tilde{P}_1 \cup \tilde{P}_2, f) = U(\tilde{P}_1, f) + U(\tilde{P}_2, f) < \int_a^b f + \int_b^c f + \delta. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Alternativer Beweis: Sei $f_1 \equiv f\Big|_{[a,b]}$ und $f_2 \equiv f\Big|_{[b,c]}$. Da f_1 und f_2 Riemann-integrierbar sind gibt es für alle $\varepsilon > 0$ Partitionen $P_1 \subset [a,b]$ und $P_2 \subset [b,c]$, so dass

$$U(P_1, f_1) - L(P_1, f_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$U(P_2, f_2) - L(P_2, f_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

(s. Satz im AnaI-Skript, Seite 171). Nun setzen wir

$$\tilde{f}_1(x) := \begin{cases} f(x) & a \le x \le b \\ 0 & b < x \le c \end{cases} \quad \text{und} \quad \tilde{f}_2(x) := \begin{cases} 0 & a \le x < b \\ f(x) & b \le x \le c \end{cases}.$$

Weiter setzen wir

$$\tilde{P}_1 := P_1 \cup \{b + \tilde{\varepsilon}\} \cup \{c\}, \quad \tilde{P}_2 := P_2 \cup \{b - \tilde{\varepsilon}\} \cup \{a\}$$

mit $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2(|f(b)|+1)}$. *Es gilt nun*

$$\begin{aligned} U(\tilde{P}_1, \tilde{f}_1) - L(\tilde{P}_1, \tilde{f}_1) &= \Big(U(P_1, f_1) + \tilde{\varepsilon} \cdot \max\{0, f(b)\} + 0 \cdot (c - (b + \tilde{\varepsilon}))\Big) \\ &\quad - \Big(L(P_1, f_1) + \tilde{\varepsilon} \cdot \min\{0, f(b)\} + 0 \cdot (b - \tilde{\varepsilon} - a)\Big) \\ &= U(P_1, f_1) - L(P_1, f_1) + \tilde{\varepsilon} \cdot |f(b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \int_a^b f_1 - \varepsilon < L(P_1, f_1) - \frac{\varepsilon}{2} \leq L(\tilde{P}_1, \tilde{f}_1) \leq \int_a^c \tilde{f}_1 \\ \leq U(\tilde{P}_1, \tilde{f}_1) \leq U(P_1, f_1) + \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b f_1 + \varepsilon \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\int_a^c \tilde{f}_1 = \int_a^b f_1.$$

Analog zeigt man $U(\tilde{P}_2, \tilde{f}_2) - L(\tilde{P}_2, \tilde{f}_2) < \varepsilon$ *und* $\int_a^c \tilde{f}_2 = \int_b^c f_2$. *Damit ist gezeigt, dass* $\tilde{f}_1$ *und* $\tilde{f}_2$ *auf* $[a, c]$ *Riemann-integrierbar sind. Nun definieren wir*

$$g : [a, c] \to \mathbb{R} \quad \textit{mit} \quad g(x) := \begin{cases} 0 & x \neq b \\ f(b) & x = b \end{cases}.$$

Diese Funktion ist Riemann-integrierbar auf $[a, c]$ *mit* $\int_a^c g = 0$ *(s. Klausur AnaI Aufg. 5). Da die Summe Riemann-integrierbarer Funktionen wieder Riemann-integrierbar ist, ist also auch* $f \equiv \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 - g$ *auf* $[a, c]$ *Riemann-integrierbar. Weiter gilt*

$$\begin{aligned} \int_a^c f &= \int_a^c \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 - g = \int_a^c \tilde{f}_1 + \int_a^c \tilde{f}_2 - \int_a^c g \\ &= \int_a^b f_1 + \int_b^c f_2 = \int_a^b f + \int_b^c f. \end{aligned}$$

T3 Partialbruchzerlegung

Bestimme die folgenden Integrale mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung:

i)

$$\int_{-1}^1 \frac{2x + 1}{x^2 + x - 6} dx,$$

ii)

$$\int_0^1 \frac{x}{(x + 1)^3} dx.$$

i) Die Nullstellen von $q(x) = x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ *sind* -3 *und* 2. *Also lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung*

$$\frac{2x + 1}{(x + 3)(x - 2)} = \frac{A_1}{x + 3} + \frac{A_2}{x - 2}.$$

Das zugehörige lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 2 \\ -2A_1 + 3A_2 &= 1 \end{aligned}$$

hat die Lösung $A_1 = A_2 = 1$. *Also:*

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x+1}{x^2+x-6}dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{x-2}dx$$
$$= \log(x+3)\Big|_{-1}^{1} + \log|x-2|\Big|_{-1}^{1} = \log(\frac{2}{3}).$$

Alternativ: Bei genauerem Betrachten erkennen wir auch hier den Integranden als Ableitung (Logarithmisches Ableiten) und erhalten daher:

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x+1}{x^2+x-6}dx = \int_{-1}^{1} \Big(\ln|x^2+x-6|\Big)' dx = \ln|x^2+x-6|\Big|_{-1}^{1} = \ln(\frac{2}{3}).$$

(Man kann aber auch mit $t := x^2+x-6$ *substituieren.)*

ii) Für die Partialbruchzerlegung von $\frac{x}{(x+1)^3}$ *ist der Ansatz*

$$\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3}$$

erforderlich. Als lineares Gleichungssystem erhält man

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ 2A_1 + A_2 &= 1 \\ A_1 + A_2 + A_3 &= 0 \end{aligned}$$

und somit $A_1 = 0, A_2 = 1, A_3 = -1$. *Schließlich:*

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx - \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3}dx = -\frac{1}{x+1}\Big|_0^1 + \frac{1}{2(x+1)^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}.$$