Fachbereich Mathematik
Achim Blumensath
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Juni, 2009

6. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik I
SS 2009

(E6.1) [CYK Algorithmus]

Betrachten Sie die kontextfreie Sprache L, die von der folgenden Grammatik in Chomsky-Normalform erzeugt wird:

$$\begin{array}{lcl} X_0 & \to & Z_aZ_b \mid Z_bZ_a \mid X_0X_0 \mid Z_aX \mid Z_bY \\ X & \to & X_0Z_b \\ Y & \to & X_0Z_a \\ Z_a & \to & a \\ Z_b & \to & b \end{array}$$

(i) Beschreiben Sie L umgangssprachlich.

(ii) Wenden Sie den CYK Algoritmus an, um zu bestimmen ob $bbab \in L$ und $aabbab \in L$.

Musterlösung.

(i) L besteht aus den Worte in $\{a, b\}^*$, die gleichviel a's wie b's enthalten.

(ii)

	a	a	b	b	a	b
1	Z_a	Z_a	Z_b	Z_b	Z_a	Z_b
2	–	X_0	–	X_0	X_0	
3	–	X	–	X		
4	X_0	X_0	–			
5	Y	X				
6	X_0					

Deshalb ist $aabbab$ erzeugbar und $bbab$ nicht.

(E6.2) [Kellerautomaten]

(i) Konstruieren Sie einen Kellerautomat, der die folgende kontextfreie Sprache erkennt:

$$L = \{a^i b^j c^k \, : \, i = j + k\}.$$

(ii) Bestimmen Sie einen Kellerautomaten, der die von der folgenden Grammatik erzeugte Sprache erkennt.

$$\begin{array}{lcl} X_0 & \to & YXa \,|\, aZb \,|\, \varepsilon \\ X & \to & Za \,|\, X_0 b \\ Y & \to & a \,|\, ZZXa \\ Z & \to & aX_0 \,|\, Yb \end{array}$$

Musterlösung.

(i) Sei $\mathcal{P} = (\Sigma, Q, q_a, \Delta, A, \Gamma, \#)$ der Kellerautomat mit Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, Zustandsmenge $Q = \{q_a, q_b, q_c\}$, q_a als Anfangzustand, $A = \{q_a, q_b, q_c\}$ als Menge der akzeptierenden Zustände, Kelleralphabet $\Gamma = \{\#, |\}$ und Übergangsrelation Δ gegeben durch

$$\begin{array}{ll} \{ & (q_a, \#, \varepsilon, \varepsilon, q_a) \\ & (q_a, \#, a, |, q_a) \\ & (q_a, |, a, ||, q_a) \\ & (q_a, |, b, \varepsilon, q_b) \\ & (q_a, |, c, \varepsilon, q_c) \\ & (q_b, |, b, \varepsilon, q_b) \\ & (q_b, |, c, \varepsilon, q_c) \\ & (q_c, |, c, \varepsilon, q_c) \quad \}. \end{array}$$

Dann erkennt $\mathcal{P}$ die Sprache L.

(ii) Das Verfahren auf Seite 60 von dem Skript ergibt einen Kellerautomat mit Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b\}$, Zustandsmenge $Q = \{q\}$ mit q als (akzeptierendem) Anfangzustand, $\Gamma = \{X_0, X, Y, Z, a, b\}$ und Übergangsrelation Δ gegeben durch:

$$\begin{array}{ll} \{ & (q, X_0, \varepsilon, YXa, q) \\ & (q, X_0, \varepsilon, aZb, q) \\ & (q, X_0, \varepsilon, \varepsilon, q) \\ & (q, X, \varepsilon, Za, q) \\ & (q, X, \varepsilon, X_0 b, q) \\ & (q, Y, \varepsilon, a, q) \\ & (q, Y, \varepsilon, ZZXa, q) \\ & (q, Z, \varepsilon, aX_0, q) \\ & (q, Z, \varepsilon, Yb, q) \\ & (q, a, a, \varepsilon, q) \\ & (q, b, b, \varepsilon, q) \quad \}. \end{array}$$

(E6.3)

Zeigen Sie, dass die aufzählbare Teilmengen von Σ^* unter Durchschnitt und Vereinigung abgeschlossen sind.

Musterlösung.

Nach Definition 3.4.12 heißt eine Menge $L \subseteq \Sigma^*$ aufzählbar, wenn L von einer Turingmaschine erkannt wird. Nehmen wir deshalb an, dass $K \subseteq \Sigma^*$ von einer Turingmaschine $\mathcal{M}_K$ erkannt wird und $L \subseteq \Sigma^*$ von $\mathcal{M}_L$.

Die folgende Maschine $\mathcal{M}$ erkennt die Sprache $K \cap L$: Auf einer bestimmten Eingabe simuliert die Machine $\mathcal{M}$ gleichzeitig die Berechnungen von $\mathcal{M}_K$ und $\mathcal{M}_L$ auf dieser Eingabe, bis beide terminieren (was auch nie der Fall sein kann!). Akzeptiern beide Maschinen, so akzeptiert auch $\mathcal{M}$.

Die Sprache $K \cup L$ wird von der folgenden Maschine $\mathcal{M}'$ erkannt: Auf einer bestimmten Eingabe simuliert die Machine $\mathcal{M}'$ gleichzeitig die Berechnungen von $\mathcal{M}_K$ und $\mathcal{M}_L$ auf dieser Eingabe, bis eine von beiden terminiert (was auch nie der Fall sein kann!). Wird die Eingabe von der terminierten Machine akzeptiert, dann wird sie auch von $\mathcal{M}'$ akzeptiert. Wird sie verworfen, dann macht $\mathcal{M}'$ mit der anderen Berechnung weiter, bis diese terminiert (was wieder nie der Fall sein kann!). Wird die Eingabe von der anderen Maschine akzeptiert, wird sie auch von $\mathcal{M}'$ akzeptiert; wird die Eingabe wieder verworfen, dann wird sie auch von $\mathcal{M}'$ verworfen.

(E6.4)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Zu welchem Niveau der Chomsky-Hierarchie gehören die folgenden Sprachen?

$L_1 = \{w \in \Sigma^* :$ zu jedem a kann man eine spätere Stelle mit einem b finden derart, dass jedes b zu höchstens einem a gehört $\}$

$L_2 = \{w \in \Sigma^* :$ wenn in w ein a vorkommt, dann gibt es eine spätere Stelle, an der ein b steht, wobei dieses b zu mehreren a's gehören kann $\}$

Musterlösung.

(i) L_1 ist kontextfrei aber nicht regulär.

Angenommen L_1 wäre regulär. Sei n die Konstante aus dem Pumping Lemma und setze $x = a^n b^n$. Nach dem Lemma gibt es eine Zerlegung $x = uvw$ mit $|uv| \leqslant n, v \neq \varepsilon$ und $uv^m w \in L_1$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Da $|uv| \leqslant n$, ist $u = a^i$ und $v = a^k$ für geeignete $i, k \leqslant n$. Also ist $uv^2 w = a^{n+k} b^n \notin L_1$. Widerspruch!

Ein PDA für L_1 ist $\mathcal{P} = (\Sigma, Q, q, \Delta, A, \Gamma, \#)$ mit $Q = \{q\}$, $\Gamma = \{\#, |\}$, $A = \{q\}$ und

Transitionen

$$
\begin{array}{llllll}
\{ & (q, & \#, & \varepsilon, & \varepsilon, & q) \\
 & (q, & \#, & b, & \#, & q) \\
 & (q, & \#, & a, & |\#, & q) \\
 & (q, & |, & a, & ||, & q) \\
 & (q, & |, & b, & \varepsilon, & q) \\
 & (q, & \#, & c, & \#, & q) \\
 & (q, & |, & c, & |, & q) \quad \}.
\end{array}
$$

(ii) $L_2 = L(c^* + (a + b + c)^* bc^*)$ ist regulär.