Fachbereich Mathematik
Achim Blumensath
Benno van den Berg

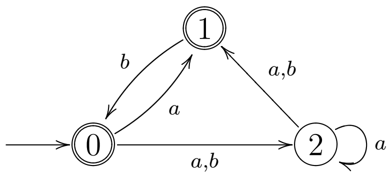
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

13. Mai, 2009

4. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik I
SS 2009

(E4.1)

Betrachten Sie den NFA $\mathcal{A}$



und sei $L = L(\mathcal{A})$.

Konstruieren Sie einen minimalen DFA $\mathcal{B}$ mit $L(\mathcal{B}) = L$.

Musterlösung.

Erst müssen wir einen DFA finden, der die gleiche Sprache erkennt.

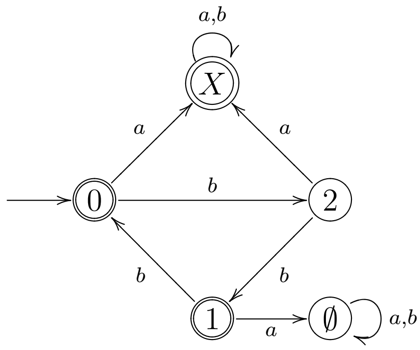
δ	a	b
$\{0\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{0,1\}$
$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{1\}$
$\{0,1\}$	$\{1,2\}$	$\{0,2\}$
$\{1\}$	$\emptyset$	$\{0\}$
$\{0,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Startzustand ist $\{0\}$ und die akzeptierende Zustände sind $\{0\}, \{1,2\}, \{0,1\}, \{1\}, \{0,2\}$.

Wir bestimmen die Relationen $\not\sim_i$.

$$\begin{aligned}
\sim_0 &: \{0\}, \{1,2\}, \{0,1\}, \{1\}, \{0,2\} \mid \{2\}, \emptyset \\
\sim_1 &: \{0\} \mid \{1\} \mid \{1,2\}, \{0,1\}, \{0,2\} \mid \{2\} \mid \emptyset \\
\sim_2 &: \{0\} \mid \{1\} \mid \{1,2\}, \{0,1\}, \{0,2\} \mid \{2\} \mid \emptyset
\end{aligned}$$

Da $\not\sim_2 = \not\sim_1$ können wir die Zustände $\{1,2\}$ und $\{0,1\}$ und $\{0,2\}$ identifizieren. Deshalb sieht der DFA minimaler Größe wie folgt aus:



(E4.2)

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(i) $L_1 = \{a^n b^m \in \{a,b\}^* \,:\, n \geqslant m\}$

(ii) $L_2 = \{a^{n!} \in \{a\}^* \,:\, n \geqslant 0\}$

(iii) $L_3 = \{a^p \in \{a\}^* \,:\, p \text{ eine Primzahl}\}$

Musterlösung.

(i) Nehmen wir an, dass L_1 regulär ist. Wegen des Pumping Lemmas, gibt es dann eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes $x \in L_1$ mit $|x| \geqslant n$ sich als $x = u \cdot v \cdot w$ schreiben lässt, mit $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, wobei für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so eine natürliche Zahl und betrachte das Wort

$$x = a^n b^n.$$

Jetzt soll es u, v, w geben, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$. Insbesondere soll auch gelten: $u \cdot w \in L_1$ für $m = 0$. Weil $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, ist v der Form $v = a^k$ mit $k > 0$. Das heißt, dass $u \cdot w$ mehr b's (nämlich n) als a's enthält (nämlich $n - k < n$). Das widerspricht $u \cdot w \in L_1$. Wir schliessen, dass L_1 nicht regulär ist.

(ii) Wir verwenden hier, dass

$$(n+1)! - n! = (n+1)n! - n! = nn! > n,$$

falls $n > 1$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und betrachte das Wort

$$x = a^{(n+1)!}.$$

Offensichtlich $x \in L_2$. Wir überprüfen, ob es u, v, w geben kann, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_2$. Klar ist, dass das für $n = 0, 1$ nicht geht. Nehmen wir darum an, dass $n > 1$. Dann ist v von der Form $v = a^k$ mit $0 < k \leqslant n$. Deshalb enthält $u \cdot w$ echt weniger als $(n+1)!$ Buchstaben, aber gleichzeitig echt mehr als $n!$ Buchstaben (weil $(n+1)! - k \geqslant (n+1)! - n > n!$). Das widerspricht $u \cdot w \in L_2$. Wir schliessen, dass L_2 das Pumping Lemma verletzt und deshalb nicht regulär sein kann.

(iii) Sei wieder $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und betrachte das Wort

$$x = a^l,$$

wobei $l > n+1$ eine Primzahl ist. Offensichtlich $x \in L_3$. Wir überprüfen, ob es u, v, w geben kann, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_3$. Aus $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|x| > n + 1$ folgt, dass $|w| > 1$. Wählen wir $m = |u| + |w| > 1$ und $x' = u \cdot v^m \cdot w$. Wir bestimmen die Länge von x':

$$|x'| = |u \cdot v^m \cdot w| = |u| + m|v| + |w| = m(|v| + 1).$$

Weil $m > 1$ und $|v| + 1 > 1$, ist $|x'|$ nicht prim. Das widerspricht $u \cdot v^m \cdot w \in L_3$. Wir schliessen, dass L_3 das Pumping Lemma verletzt und deshalb nicht regulär sein kann.

(E4.3)

Sei $L = L(b^* + b^*a(bb^*a)^*bb^*)$. Die Relation $\sim_L$ hat 4 Äquivalenzklassen:

$$\begin{aligned}
[\varepsilon] &= b^*, \\
[a] &= b^*a(bb^*a)^*, \\
[aa] &= b^*a(bb^*a)^*a(a+b)^*, \\
[ab] &= b^*a(bb^*a)^*bb^*.
\end{aligned}$$

Geben Sie einen minimalen DFA $\mathcal{A}$ an, der L erkennt.

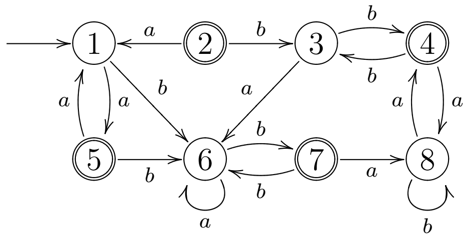
Musterlösung.

(Diese Aufgabe stimmt leider nicht, da die Äquivalenzklassen von L falsch berechnet sind.)

Hausaufgaben

(H4.4)

(a) Minimieren Sie den folgenden Automaten $\mathcal{A}$:

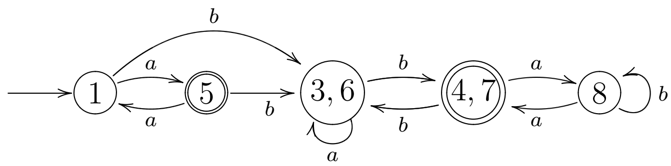


(b) Sei $L := L(\mathcal{A})$. Geben Sie für jede Äquivalenzklasse von $\sim_L$ entsprechende reguläre Ausdrücke an.

Musterlösung.

(a) Zustand 2 ist nicht erreichbar und kann weggelassen werden.

$$\begin{aligned}
&\sim_0 : 1,3,6,8 \,|\, 4,5,7\\
&\sim_1 : 1,8 \,|\, 3,6 \,|\, 4,5,7\\
&\sim_2 : 1 \,|\, 8 \,|\, 3,6 \,|\, 4,5,7\\
&\sim_3 : 1 \,|\, 8 \,|\, 3,6 \,|\, 4,7 \,|\, 5\\
&\sim_4 : 1 \,|\, 8 \,|\, 3,6 \,|\, 4,7 \,|\, 5
\end{aligned}$$



(b) Für jedes Paar p, q von Zuständen können wir einen regulären Ausdruck $\alpha_{p\to q}$ angeben, der die Sprache aller Wörter beschreibt, welche vom Zustand p nach q führen. Die Ausdrücke von der Form $\alpha_{1\to q}$ entsprechen den Äquivalenzklassen, da der Automat minimal ist.

$$\begin{aligned}
\alpha_{4,7\to 4,7} &= (ba^*b + ab^*a)^*\\
\alpha_{1\to 1} &= (aa)^*\\
\alpha_{1\to 5} &= (aa)^*a\\
\alpha_{1\to 3,6} &= (aa)^*(b+ab)(a + b\alpha_{4,7\to 4,7}b)^*\\
\alpha_{1\to 4,7} &= (aa)^*(b+ab)a^*b\alpha_{4,7\to 4,7}\\
\alpha_{1\to 8} &= (aa)^*(b+ab)a^*b\alpha_{4,7\to 4,7}ab^*
\end{aligned}$$

(H4.5)

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{a^n b^{n^2} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

Musterlösung.

Nehmen wir an, dass L regulär ist. Wegen des Pumping Lemmas, gibt es dann eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes $x \in L$ mit $|x| \geqslant n$ sich als $x = u \cdot v \cdot w$ schreiben lässt, wobei $|u \cdot v| \leqslant n$, $|v| > 0$ und für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so eine natürliche Zahl und betrachte das Wort

$$x = a^n b^{n^2}.$$

Jetzt soll es u, v, w geben, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leqslant n$, $|v| > 0$, und so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L$. Insbesondere soll auch gelten: $u \cdot w \in L$ für $m = 0$. Weil $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, ist v der Form $v = a^k$ mit $k > 0$. Das heißt, dass es $n - k$ as in $u \cdot w$ gibt und n^2 bs. Aber da $k > 0$, ist $(n - k)^2 < n^2$. Das widerspricht $u \cdot w \in L$ und deshalb kann L nicht regulär sein.