Fachbereich Mathematik
Achim Blumensath
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Mai, 2009

3. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik I
SS 2009

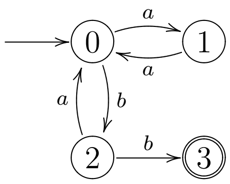
(E3.1)

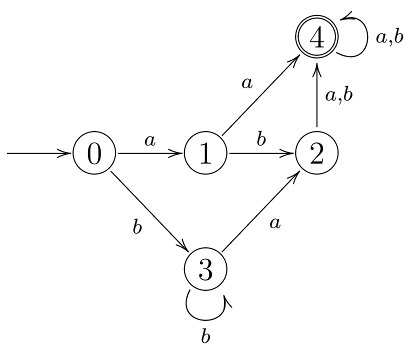
(a) Geben Sie NFA an, welche die von den regulären Ausdrücken

$$\begin{array}{ll} (1) & a(ab)^*(a+b) \\ (2) & (a+b)^*(c+ab^*a)^*a(b+c)^* \end{array}$$

beschriebene Sprachen erkennen.

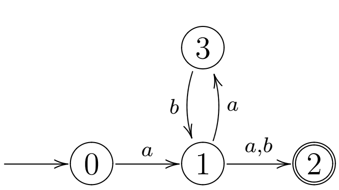
(b) Geben Sie reguläre Ausdrücke für die von folgenden Automaten erkannte Sprachen an:

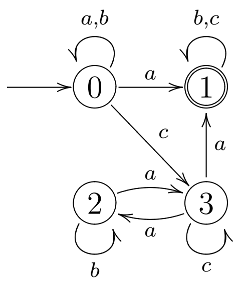




Musterlösung.

(a) NFA:

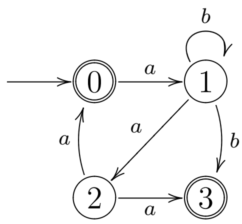




(b) $(aa+ba)^*bb$ und $aa(a+b)^* + ab(a+b)(a+b)^* + bb^*a(a+b)(a+b)^*$.

(E3.2)

Betrachten Sie den NFA $\mathcal{A}$



(a) Bestimmen Sie einen regulären Ausdruck für $L(\mathcal{A})$.

(b) Geben Sie einen DFA $\mathcal{B}$ an mit $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A})$.

(c) Geben Sie einen Automaten an, der $\Sigma^* \setminus L(\mathcal{A})$ erkennt.

Musterlösung.

(a) $(ab^*aa)^* + (ab^*aa)^*ab^*b$.

(b) Ein DFA für L:

δ	a	b
$\{0\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,3\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{2\}$	$\{0,3\}$	$\emptyset$
$\{0,3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\{1,3\}$	$\{2\}$	$\{1,3\}$

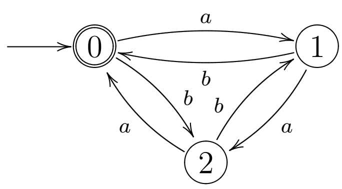
Die akzeptierende Zustände sind $\{0\}, \{0,3\}$ und $\{1,3\}$.

(c) Wir können den Automaten aus (b) nehmen und die akzeptierenden und nicht-akzeptierenden Zustände vertauschen.

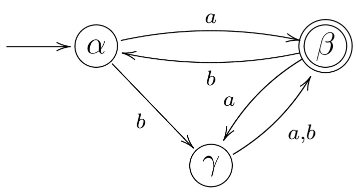
(E3.3)

Wir betrachten die DFA

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



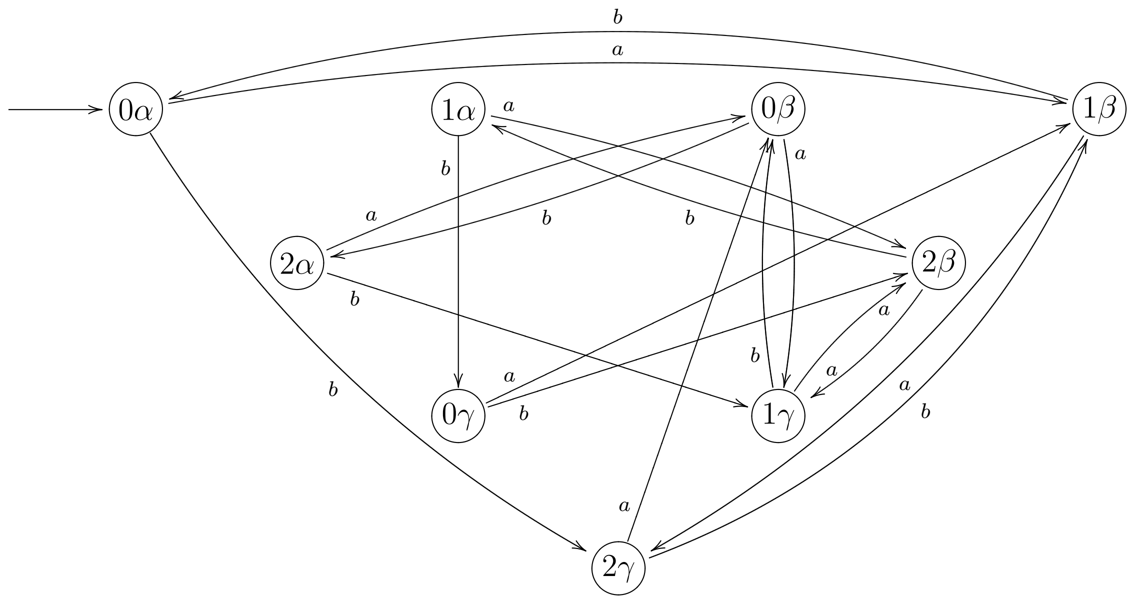
(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Produktkonstruktion DFA für die Sprachen $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B})$ und $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$.

(b) Können Sie einen NFA für die Sprache $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$ konstruieren, der kleiner ist als der DFA aus (a)?

Hinweis: Versuchen Sie, aus $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ direkt einen NFA zu konstruieren, ohne Umweg über die Produktkonstruktion.

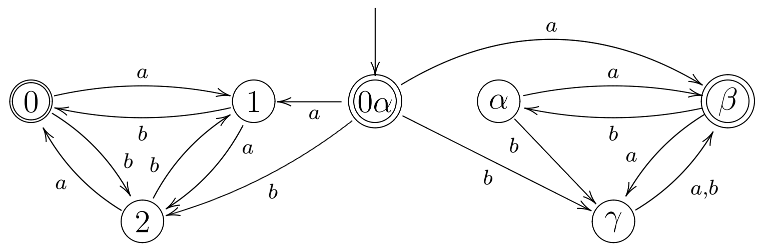
Musterlösung.

(a)



Für die Vereinigung nehmen wir $0\alpha, 0\beta, 0\gamma, 1\beta, 2\beta$ als akzeptierende Zustände. Für den Durchschnitt ist 0β der einzige akzeptierende Zustand.

(b) Wir führen einen neuen Startzustand ein.



Hausaufgabe

(H3.4)

Die *Umkehrung* eines Wortes $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ ist das Wort $\tilde{w} = a_n \dots a_1$. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir die *Spiegelsprache*

$$L^\sim := \{\, \tilde{w} \mid w \in L \,\}.$$

Zeigen Sie per Induktion über den Aufbau regulärer Ausdrücke, daß es für jeden regulären Ausdruck α einen regulären Ausdruck β gibt mit $L(\beta) = L(\alpha)^\sim$.

Musterlösung.

Wir definieren eine Funktion f auf regulären Ausdrücken, so daß $L(f(\alpha)) = L(\alpha)^\sim$. Die Definition ist rekursiv:

$$\begin{aligned}
f(\emptyset) &:= \emptyset\,, \\
f(a) &:= a\,, \quad \text{für } a \in \Sigma\,, \\
f(\alpha\beta) &:= f(\beta)f(\alpha)\,, \\
f(\alpha+\beta) &:= f(\alpha)+f(\beta)\,, \\
f(\alpha^*) &:= f(\alpha)^*\,.
\end{aligned}$$

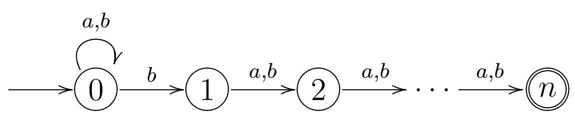
Es bleibt zu zeigen, daß f die gewünschte Eigenschaft hat. Wir beweisen sie per Induktion über den Aufbau regulärer Ausdrücke.

$$\begin{aligned}
L(f(\emptyset)) &= L(\emptyset) = \emptyset = L(\emptyset)^\sim, \\
L(f(a)) &= L(a) = a = L(a)^\sim, \\
L(f(\alpha\beta)) &= L(f(\beta))L(f(\alpha)) = L(\beta)^\sim L(\alpha)^\sim = L(\alpha\beta)^\sim, \\
L(f(\alpha+\beta)) &= L(f(\alpha)) \cup L(f(\beta)) = L(\alpha)^\sim \cup L(\beta)^\sim = L(\alpha+\beta)^\sim, \\
L(f(\alpha^*)) &= L(f(\alpha))^* = (L(\alpha)^\sim)^* = (L(\alpha)^*)^\sim = L(\alpha^*)^\sim\,.
\end{aligned}$$

Knobelaufgabe

(E3.5)

Betrachten Sie den folgenden NFA $\mathcal{A}_n$:



(a) Bestimmen Sie $L(\mathcal{A}_n)$.

(b) Zeigen Sie, dass es keinen äquivalenten DFA gibt mit weniger als 2^n-Zustände.

Musterlösung.

(a) $L(\mathcal{A}_n)$ is die Menge von a/b-Folgen, an deren n-ter Position vor dem Ende ein b steht.

(b) Nehmen wir an, $\mathcal{Q}$ ist ein äquivalenter DFA mit weniger als 2^n-Zuständen. Dann gäbe es einen Zustand q und zwei verschiedene Zeichenreihen $x_1x_2\dots x_n$ und $y_1y_2\dots y_n$, sodass sich $\mathcal{Q}$ nach dem Einlesen sowohl von $x_1x_2\dots x_n$ als auch von $y_1y_2\dots y_n$ im Zustand q befände („Schubfachprinzip").

Da die Zeichenreihen verschieden sind, müssen sie sich an einer bestimmten Position unterscheiden; sei $x_i \neq y_i$. Angenommen (auf Grund der Symmetrie ohne Beschränkung der Allgemeinheit), $x_i = b$ und $y_i = a$. Wenn $i = 1$, dann muss q sowohl ein akzeptierender Zustand als auch ein nicht akzeptierender Zustand sein, da $x_1x_2\dots x_n$ akzeptiert wird (das n-te Zeichen vor dem Ende ist b) und $y_1y_2\dots y_n$ nicht. Ist $i > 1$, dann betrachten wir den Zustand p, in den $\mathcal{Q}$ nach dem Einlesen sowohl von $x_1x_2\dots x_na^{i-1}$ als auch von $y_1y_2\dots y_na^{i-1}$ käme. Da $x_i = b$ und $y_i = a$, müsste $x_1x_2\dots x_na^{i-1}$ akzeptiert werden (das n-te Zeichen vor dem Ende ist $x_i = b$) und $y_1y_2\dots y_na^{i-1}$ nicht, d.h. p müsste ein akzeptierender und zugleich ein nicht akzeptierender Zustand sein.