



22. April, 2009

1. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik I SS 2009

(E1.1) [Transitionssysteme]

Modellieren Sie einen Bahnübergang als endliches Transitionssystem.

Musterlösung.

Unterscheide z.B. die folgenden fünf Zustände:

{Licht aus + Schranke auf, gelbes Licht + Schranke auf, rotes Licht + Schranke zu}.

Im Normalbetrieb wechselt die Lichtzeitanlage ihre Zustände in folgender Reihenfolge:

aus \rightarrow gelb \rightarrow rot \rightarrow aus.

(E1.2) [Transitionssysteme]

Gegeben sei ein Stapel unterschiedlich großer Pfannkuchen, die der Größe nach sortiert werden sollen. Erlaubt ist es dabei nur, einen Oberteil des Stapels umzudrehen. Bei 6 Pfannkuchen, die wir der Größe nach mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnen und anfangs in der Ordnung 352416 auf dem Stapel liegen, würde das Umdrehen der ersten (obersten) 4 dem Übergang

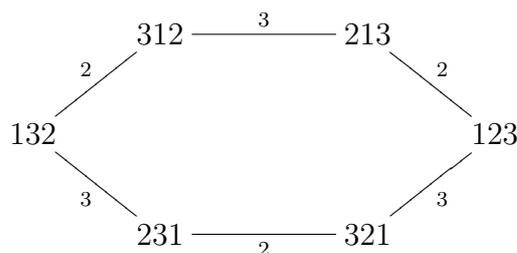
$$352416 \xrightarrow{4} 425316$$

entsprechen.

- (i) Zeichnen Sie für Stapel von 3 Pfannkuchen ein Diagramm mit allen möglichen Stapeln und den möglichen Übergängen (Wenden der ersten 2 oder 3) zwischen diesen.
- (ii) Betrachten Sie Stapel mit 4 Pfannkuchen. Geben Sie für $0 \leq k \leq 4$ die Menge aller Stapel an, die sich mit k Operationen sortieren lassen, aber nicht mit weniger als k Operationen. Welches ist der einzige Stapel, der sich auf zwei verschiedene Weisen in genau 3 Schritten sortieren lässt?

Musterlösung.

(i)



(ii)

0 : 1234
1 : 2134, 3214, 4321
2 : 3124, 4312, 2314, 4123, 3421, 2341
3 : 1324, 4213, 3412, 1342, 4132, 1423, 2143, 2431, 1243, 3241, 1432
4 : 4231, 2413, 3142

$$1324 \xrightarrow{2} 3124 \xrightarrow{3} 2134 \xrightarrow{2} 1234$$

$$1324 \xrightarrow{3} 2314 \xrightarrow{2} 3214 \xrightarrow{3} 1234$$

(E1.3) [Formale Sprachen]

Für zwei Σ -Sprachen L_1, L_2 wird die Vereinigung definiert als $L_1 \cup L_2$ und die Konkatenation durch

$$L_1 \cdot L_2 := \{v \cdot w : v \in L_1, w \in L_2\}.$$

Wir schreiben üblicherweise $L_1 L_2$ statt $L_1 \cdot L_2$. Zeigen Sie, dass

(i) $L(L_1 \cup L_2) = (LL_1) \cup (LL_2)$

(ii) $(L_1 \cup L_2)L = (L_1 L) \cup (L_2 L)$

Gelten ähnliche Aussagen mit dem Durchschnitt \cap statt \cup ?

Geben Sie ein Gegenbeispiel zu $L_1 L_2 = L_2 L_1$ an.

Musterlösung.

(i) Wir beweisen: $l \in L(L_1 \cup L_2) \Leftrightarrow l \in (LL_1) \cup (LL_2)$.

\Rightarrow : Wenn l in $L(L_1 \cup L_2)$ enthalten ist, dann gilt $l = v \cdot w$, wobei v Element von L und w Element von L_1 oder von L_2 ist. Wenn w in L_1 enthalten ist, dann ist $v \cdot w$ in LL_1 enthalten und daher auch in $(LL_1) \cup (LL_2)$.

Ähnlich gilt: Wenn w in L_2 enthalten ist, dann ist $v \cdot w$ in LL_2 enthalten und daher auch in $(LL_1) \cup (LL_2)$.

\Leftarrow : Angenommen, l sei in $(LL_1) \cup (LL_2)$ enthalten. Dann ist l Element von LL_1 oder von LL_2 . Sei zunächst l in LL_1 . Dann ist $l = v \cdot w$, wobei v Element von L und w

Element von L_1 ist. Da w Element von L_1 ist, ist w auch in $L_1 \cup L_2$ enthalten. Folglich ist $v \cdot w$ in $L(L_1 \cup L_2)$ enthalten. Die andere Möglichkeit ist, dass w in L_2 enthalten ist. Dann zeigt ein ähnliches Argument wie zuvor, dass l in $L(L_1 \cup L_2)$ enthalten ist.

(ii) Wie (i).

Die Aussage $L(L_1 \cap L_2) = (LL_1) \cap (LL_2)$ ist *nicht* richtig. Ein Gegenbeispiel wird gegeben durch: $\Sigma = \{a, b\}$, $L = \{a, aa\}$, $L_1 = \{b\}$ und $L_2 = \{ab\}$. Dann ist $L(L_1 \cap L_2)$ leer, und $LL_1 \cap LL_2 = \{aab\}$.

Ein Gegenbeispiel zu $L_1L_2 = L_2L_1$ wird gegeben durch: $\Sigma = \{a, b\}$, $L_1 = \{a\}$ und $L_2 = \{b\}$.

(H1.4) [Hausaufgabe: Relationen]

Sei R eine binäre Relation auf X , also $R \subseteq X \times X$.

Wir definieren (induktiv)

$$\begin{aligned} R^0 &:= \{(x, x) : x \in X\}, \\ R^{n+1} &:= \{(x, y) : \text{es gibt ein } z \text{ mit } (x, z) \in R \text{ und } (z, y) \in R^n\}, \\ R^* &:= \bigcup_{n \geq 0} R^n. \end{aligned}$$

Ziegen Sie:

- (i) R^* ist eine reflexive Relation.
- (ii) R^* ist eine transitive Relation.
- (iii) R^* umfasst R , d.h. $R \subseteq R^*$.
- (iv) R^* ist die kleinste reflexive und transitive Relation, die R umfasst (d.h. falls R' reflexiv und transitiv ist mit $R \subseteq R'$, so gilt $R^* \subseteq R'$)

Musterlösung.

Bemerke dass:

$(x, y) \in R^n$ genau dann, wenn es eine Reihe z_0, \dots, z_n gibt mit $x = z_0, y = z_n$ so dass $z_0 R z_1 R z_2 R \dots R z_n$.

- (i) R^* is reflexiv, denn $R^0 \subseteq R^*$.
- (ii) Seien x, y, z mit xR^*y und yR^*z gegeben. Dann gibt es Zahlen i und j mit $xR^i y$ und $yR^j z$. Dann gilt $xR^{i+j} z$ und damit $xR^* z$.
- (iii) R^* umfasst R , denn $R = R^1 \subseteq R^*$.
- (iv) Sei R' eine beliebige reflexive und transitive Relation, die R umfasst. Dann muss gelten: $R^0 \subseteq R'$, da R' reflexiv ist, und ferner $R = R^1 \subseteq R'$, da R' die Relation R umfasst. Da R' auch transitiv ist, folgt mit Induktion, dass R^2, R^3, \dots in R' enthalten sind. Also gilt $R^* \subseteq R'$. Damit ist gezeigt, dass R^* die *kleinste* solche Relation ist.