Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
13.07.2009

13. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Volumenberechnung mit Kugelkoordinaten)
Skizzieren Sie grob die Menge B und berechnen Sie ihr Volumen:

$$B \;:=\; \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2 \geq x^2+y^2 \text{ und } 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}.$$

Aufgabe G2 (Jacobi-Abbildung)
Die Jacobi-Abbildung $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$J\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1-v) \\ uv \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass J den Streifen $S := \mathbb{R}_+ \times (0,1)$ bijektiv auf $\mathbb{R}^2_+$ abbildet und die Rechtecke $S_n = (0,n) \times (0,1)$ auf die Dreiecke $D_n = \{(x,y) : \, 0 < x,\, 0 < y,\, x+y < n\}$.
Geben Sie die Umkehrabbildung an.

b) Für eine unbeschränkte Menge $T \subset \mathbb{R}^2$ definieren wir

$$\int\limits_T f \, d(x,y) := \lim_{n\to\infty} \int\limits_{T_n} f \, d(x,y)$$

falls der Grenzwert existiert; dabei seien die Mengen T_n Jordan-messbar und es gelte $T_n \subset T_{n+1} \subset T$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man beachte, dass diese Definition gegebenenfalls von der Wahl der Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängt.
Zeigen Sie, $f \geq 0$ ist genau dann (für eine geeignete Folge an Mengen $T_n \subset T$) über $\mathbb{R}^2_+$ integrierbar, wenn $(f \circ J) \cdot u$ über S(für eine geeignete Folge an Mengen) integrierbar ist. Ferner gilt dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} f(x,y)\, d(x,y) = \int\limits_S f(u(1-v), uv) \cdot u \, d(u,v).$$

c) Es seien $p, q > 0$. Benutzen Sie die obige Gleichung, um zu zeigen, dass für das Eulersche Betaintegral

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q-1} \, dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

gilt, wobei $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \, dx$ die Gamma-Funktion ist.

Aufgabe G3 (Volumenberechnung mit Zylinderkoordinaten)
Bestimme das Volumen, welches innerhalb des Zylinders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, über der Ebene $z = 0$ und unterhalb des durch die Gleichung $(x + 2)^2 + y^2 = 4z$ gegebenen Paraboloids liegt.

Aufgaben zu Integralsätzen (zum Selbststudium)

Aufgabe G4 (Satz von Green)
Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ein BV-Normalbereich, dessen Rand sich durch die stückweise stetig differenzierbare Funktion $\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ der Form

$$\gamma(\phi) = \begin{pmatrix} r(\phi)\cos(\phi) \\ r(\phi)\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

für ein $r \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}_+$ mit $r(0) = r(2\pi)$ parametrisieren läßt.

a) Zeige mit Hilfe des Greenschen Satzes, daß sich die Fläche von M durch

$$|M| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\phi)d\phi$$

berechnen läßt.

b) Berechne für den Fall der Kardioide $r(\phi) = 1 + \cos(\phi)$ den Flächeninhalt von M.

Aufgabe G5 (Rechenaufgabe zum Gaußschen Integralsatz)
Wir betrachten die Menge $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^4 + z^6 \leq 1\}$ und das Vektorfeld

$$F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 , \qquad F(x, y, z) := \big(x^2y^3,\, xz + xy^4,\, \cos(xy)\big) .$$

a) Zeigen Sie, dass K ein Kompaktum mit glattem Rand ist.

b) Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_{\partial K} F(x, y, z) \cdot n \; do ,$$

indem Sie es als ein geeignetes Volumenintegral umschreiben; hierbei ist $n \colon \partial K \to \mathbb{R}^3$ das äußere Normalenfeld von K.

Beachten Sie, dass wir n gar nicht explizit ausrechnen müssen!

Aufgabe G6 (Stockscher Integralsatz))
Sei $D = \{(u,\, v) \in \mathbb{R} : \, u^2 + v^2 < 1\}$,

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad F(u, v) = (u, v, uv)$$

und $\Omega = F(D)$ das durch F definierte Flächenstück mit Parametermenge D und Rand $\partial\Omega = F(\partial D)$. Die Orientierung von $\partial\Omega$ werde durch die mathematisch positive Orientierung von ∂D definiert.

a) Berechnen Sie die Oberfläche von F, d.h.

$$\int\limits_{\Omega} do.$$

b) Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{rot} H \cdot n \, do.$$

für das Vektorfeld $H(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, 0)$ direkt sowie mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.