Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
06.07.2009

12. Übungsblatt zur „Analysis II"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Jordan-Messbarkeit)

Die Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ sei Jordan-messbar. Zeigen Sie, dass dann für jedes $r > 0$ auch die Menge

$$rB := \{rx : x \in B\}$$

Jordan-messbar ist mit $|rB| = r^n|B|$.

Lösung: Sei R ein Rechteck welches B enthält. Da B Jordan-messbar ist, ist die charakteristische Funktion χ_B integrierbar. D.h., für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine Partition P von R,so dass

$$O(P, \chi_B) - U(P, \chi_B) < \epsilon$$

gilt. Die Menge $P_r = \{rS : S \in P\}$ ist eine Partition von $rR \supset rB$, da Rechtecke durch die Skalierung auf Rechtecke abgebildet werden. Weiterhin gilt

$$\sup_{x \in rS} \chi_{rB} = \sup_{x \in S} \chi_B \text{ und } |rS| = r^n|S|.$$

Daraus folgt

$$O(P_r, \chi_{rS}) = r^n O(P, \chi_S)$$

und analog

$$U(P_r, \chi_{rS}) = r^n U(P, \chi_S).$$

Somit gilt

$$O(P_r, \chi_{rS}) - U(P_r, \chi_{rS}) = r^n O(P, \chi_S) - r^n U(P, \chi_S) < r^n \epsilon,$$

damit ist rB eine Jordan-messbare Menge.
Analog kann man argumentieren, dass ∂rB eine Jordan-Nullmenge ist.

Aufgabe G2 (Satz von Cavalieri)

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge, so dass der "Schnitt"

$$A_{x_n} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in A\}$$

für jedes $x_n \in \mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^{n-1}$ Jordan-messbar ist.

a) Zeigen Sie:

$$|A| = \int\limits_I |A_{x_n}| dx_n,$$

wobei I ein geeignetes Intervall ist mit $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times I$ ist.

b) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Aussage das Volumen V_4 der Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ im $\mathbb{R}^4$.
Tipp: $\cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(3 + \cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha)$

Lösung:

a) Die Aussage folgt direkt aus dem Satz von Fubini: Da

$$\chi_A(x_1, \dots, x_n) = \chi_{A_{x_n}}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

und nach Voraussetzung sowohl χ_A als auch $\chi_{A_{x_n}}$, $x_n \in \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar sind, gilt für ein Rechteck $R = R' \times I$ mit $A \subseteq R$ daß

$$|A| = \int_R \chi_A dx = \int_I \int_{R'} \chi_{A_{x_n}}(x_1, \dots, x_{n-1}) d(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_I |A_{x_n}| dx_n.$$

b) Für $B = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ gilt

$$B_{x_4} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 - x_4^2\}.$$

Damit folgt $|B_{x_4}| = \frac{4}{3}\pi(1 - x_4^2)^{\frac{3}{2}}$. Also gilt

$$\begin{aligned} V_4 &= |B| \\ &= \frac{4}{3}\pi \int_{-1}^{1} (1 - x_4^2)^{\frac{3}{2}} dx_4 \end{aligned}$$

Substitution mit $x_4 = \sin\alpha$ ergibt:

$$\begin{aligned} V_4 &= \frac{4}{3}\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}} \cos\alpha \, d\alpha \\ &= \frac{4}{3}\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\alpha \, d\alpha = \frac{4}{3}\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{8}(3 + \cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha)\alpha \, d\alpha \\ &= \frac{4}{3}\frac{1}{8}\pi \left[3\alpha + \frac{1}{4}\sin 4\alpha + \frac{4}{2}\sin 2\alpha\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{6}\pi 6 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe G3 (Satz von Fubini)
Berechnen Sie das Integral

$$\int_G (x - y) d(x, y)\,,$$

wobei G , das von den Kurven

$$y = x^2, \quad y = x^2/4, \quad y = x \text{ und } \quad x = 2$$

eingeschlossene Gebiet im Quadranten $x > 0$, $y > 0$ ist.

Lösung: Wir verwenden Fubini auf dem Rechteck $[0,2] \times [0,2]$ für die integrierbare Funktion $f = (x-y)\chi_G$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_G (x-y)d(x,y) &= \int_0^2 \int_0^2 (x-y)\chi_G d(x,y) = \int_0^1 \int_{x^2/4}^{x^2} (x-y)\,dy\,dx) + \int_1^2 \int_{x^2/4}^{x} (x-y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[xy - \frac{1}{2}y^2\right]_{x^2/4}^{x^2} dx + \int_1^2 \left[xy - \frac{1}{2}y^2\right]_{x^2/4}^{x} dy\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{3}{4}x^3 - \frac{15}{32}x^4\,dx + \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{32}x^4\,dx \\
&= \left[\frac{3}{16}x^4 - \frac{3}{32}x^5\right]_0^1 + \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{5\cdot 32}x^5\right]_1^2 = \frac{43}{60}.
\end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Normalbereiche) (2+1+1 Punkte)

Es sei B ein Normalbereich bezüglich der $x-$ und der $y-$Achse, d.h.

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\} \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$.

a) Zeigen Sie: Ist f stetig auf B, so gilt

$$\int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \Big) dx = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \Big) dy$$

b) Sei f eine stetige Riemann-integrierbare Funktion. Vertauschen Sie die Reihenfolge der Integrationen für

$$\int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} f(x,y)dydx.$$

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_B x \cdot y \, d(x,y), \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

Lösung:

- Ist f auf einem Normalbereich (bezüglich der $x-$Achse) stetig, so laßt sich Satz 2.14 anwenden:

$$\int_B f(x,y)d(x,y) = \int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \Big) dx.$$

  Indem man die Variablen x und y vertauscht, folgt, daß für einen Normalbereich bezüglich der $y-$Achse gilt

$$\int_B f(x,y)d(x,y) = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \Big) dy.$$

  Also gilt die Gleichheit der beiden Integrale.

- Es ist

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq 1 - x^2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1,\ \ -\sqrt{1-y} \leq x \leq \sqrt{1-y}\}, \end{aligned}$$

  da $y \leq 1 - x^2 \iff |x| \leq \sqrt{1-y}$. Also gilt

$$\int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} f(x,y)dydx = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dxdy.$$

- Da $x^2 + y^2 \leq r^2 \iff -r \leq x \leq r, -\sqrt{r^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_B x \cdot y \, d(x,y) &= \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} x \cdot y \, dydx \\ &= \int_{-r}^{r} \Big(x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \Big) \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Masse und Schwerpunkt) (2+2 Punkte)

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Kegel mit einem Kreis in der x-y-Ebene um den Nullpunkt und mit Radius R als Grundfläche. Die Spitze des Kegels befinde sich im Punkt $(0,0,h)$. Der Kegel sei mit einer Masse gefüllt, deren Dichte $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $\rho(x_1,x_2,x_3) = x_3$ gegeben ist. Bestimmen Sie

a) die durch
$$M := \int_K \rho(x_1,x_2,x_3)d(x_1,x_2,x_3)$$
gegebene Masse des Kegels,

b) den Schwerpunkt $S = (S_1,S_2,S_3)$ des Kegels, dessen Koordinaten durch
$$S_j := \frac{1}{M}\int_K x_j\rho(x_1,x_2,x_3)d(x_1,x_2,x_3)$$
für $j = 1,2,3$ gegeben sind.

Lösung: (a) Wir verwenden Zylinderkoordinaten $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ und $x_3 = z$. Die Determinante der Jacobimatrix ist durch r gegeben und der Kegel wird durch die Menge
$$K = \{(r,\varphi,z) \ : \ 0 \le r \le R(1-z/h),\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le h\}$$
beschrieben. Für die Masse gilt dann
$$\begin{aligned}
M = & \textstyle\int_K \rho(x_1,x_2,x_3)d(x_1,x_2,x_3) & &= \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{R(1-z/h)} zr\ drdzd\varphi \\
= & \textstyle\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^h \left(R(1-\frac{z}{h})\right)^2 z\ dzd\varphi & &= \frac{1}{2}R^2\int_0^{2\pi}\int_0^h (z-2z^2/h+z^3/h^2)dzd\varphi \\
= & \textstyle R^2\pi\left[\frac{z^2}{2}-\frac{2z^3}{3h}+\frac{z^4}{4h^2}\right]_0^h & &= R^2\pi h^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{R^2h^2\pi}{12}
\end{aligned}$$

(b) Es gilt
$$\begin{aligned}
S_1 = & \textstyle\frac{1}{M}\int_K x_1\rho(x_1,x_2,x_3)d(x_1,x_2,x_3) & &= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{R(1-z/h)} r\cos\varphi\ zr\ drdzd\varphi \\
= & \textstyle\frac{1}{M}\int_0^h\int_0^{R(1-z/h)} r^2z\ drdz\int_0^{2\pi}\cos\varphi\ d\varphi & &= 0,
\end{aligned}$$
da das Integral über die Winkelvariable verschwindet. Aus Symmetriegründen gilt auch $S_2 = 0$.
$$\begin{aligned}
S_3 = & \textstyle\frac{1}{M}\int_K x_3\rho(x_1,x_2,x_3)d\lambda(x_1,x_2,x_3) & &= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{R(1-z/h)} z^2r\ drdzd\varphi \\
= & \textstyle\frac{R^2\pi}{M}\int_0^h(z^2-2z^3/h+z^4/h^2)dz & &= \frac{R^2\pi}{M}h^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}h.
\end{aligned}$$
Also gilt $S = (0,0,2h/5)$.

Geht auch ohne Substitution:
Der Schnitt des Kegels mit der Ebene $\{x : \ x_3 = k\}$ ist ein Kreis mit Radius $R\frac{h-x_3}{h}$.
$$\begin{aligned}
M &= \int_K \rho(x_1,x_2,x_3)d(x_1,x_2,x_3) = \int_0^h x_3\pi\left(R\frac{h-x_3}{h}\right)^2 dx_3 \\
&= \frac{R^2}{h^2}\pi\int_0^h x_3h^2 - 2x_3^2h + x_3^3\, dx_3 \\
&= \frac{R^2}{h^2}\pi\left[\frac{x_3^2h^2}{2}-\frac{2x_3^3h}{3}+\frac{x_3^4}{4}\right]_0^h = R^2\pi h^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{R^2h^2\pi}{12}
\end{aligned}$$

Außerdem gilt mit $r = R\frac{h-x_3}{h}$, aus Symmetriegründen

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{M}\int_K x_1\rho(x_1,x_2,x_3)d(x_1,x_2,x_3) \\ &= \frac{1}{M}\int_0^h\int_{-r}^r \underbrace{\int_{-\sqrt{r^2-x_2^2}}^{\sqrt{r^2-x_2^2}} x_1x3 \;\; dx_1}_{=0} dx_2dx_3 = 0 \end{aligned}$$

Gleiches gilt für S_2. Um S_3 zu berechnen gehen wir vor wie bei M

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{M}\int_K x_3\rho(x_1,x_2,x_3)d(x_1,x_2,x_3) = \int_0^h x_3^2\pi\left(R\frac{h-x_3}{h}\right)^2 dx_3 \\ &= \frac{1}{M}\frac{R^2}{h^2}\pi\int_0^h x_3^2h^2 - 2x_3^3h + x_3^4\,dx_3 \\ &= \frac{2h}{5} \end{aligned}$$

Aufgabe H3 (Substitutionsregel) (4 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution das Volumen des Ellipsoids

$$E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

wobei $a,b,c>0$.

Lösung: Es sei $g\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ mit $g(x,y,z)=(ax,by,cz)$. Dann ist $g(B_1(0)) = E$. g ist injektiv und stetig differenzierbar mit $\det g' > 0$. Weiterhin ist E kompakt und Jordan-messbar. Es kann also die Substitutionsregel verwandt werden.
Da

$$\det\ g' = \det\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c\end{pmatrix} = abc$$

folgt

$$|E| = \int_E 1\;\; d(u,v,w) = \int_{B_1(0)} \det Dg\;\; d(x,y,z) = abc\cdot\int_{B_1(0)} 1d(x,y,z) = \frac{4}{3}\pi abc.$$