Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
06.07.2009

12. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Jordan-Messbarkeit)
Die Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ sei Jordan-messbar. Zeigen Sie, dass dann für jedes $r > 0$ auch die Menge

$$rB := \{rx : x \in B\}$$

Jordan-messbar ist mit $|rB| = r^n|B|$.

Aufgabe G2 (Satz von Cavalieri)
Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge, so dass der “Schnitt”

$$A_{x_n} = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in A\}$$

für jedes $x_n \in \mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^{n-1}$ Jordan-messbar ist.

a) Zeigen Sie:
$$|A| = \int_I |A_{x_n}| dx_n,$$
wobei I ein geeignetes Intervall ist mit $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times I$ ist.

b) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Aussage das Volumen V_4 der Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ im $\mathbb{R}^4$.
Tipp: $\cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(3 + \cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha)$

Aufgabe G3 (Satz von Fubini)
Berechnen Sie das Integral
$$\int_G (x - y) d(x, y)\,,$$
wobei G , das von den Kurven
$$y = x^2, \quad y = x^2/4, \quad y = x \text{ und } \quad x = 2$$
eingeschlossene Gebiet im Quadranten $x > 0$, $y > 0$ ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Normalbereiche) (2+1+1 Punkte)

Es sei B ein Normalbereich bezüglich der $x-$ und der $y-$Achse, d.h.

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\} \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$.

a) Zeigen Sie: Ist f stetig auf B, so gilt

$$\int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \Big) dx = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \Big) dy$$

b) Sei f eine stetige Riemann-integrierbare Funktion. Vertauschen Sie die Reihenfolge der Integrationen für

$$\int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} f(x,y)dydx.$$

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_B x \cdot y \, d(x,y), \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

Aufgabe H2 (Masse und Schwerpunkt) (2+2 Punkte)

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Kegel mit einem Kreis in der x-y-Ebene um den Nullpunkt und mit Radius R als Grundfläche. Die Spitze des Kegels befinde sich im Punkt $(0,0,h)$. Der Kegel sei mit einer Masse gefüllt, deren Dichte $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $\rho(x_1,x_2,x_3) = x_3$ gegeben ist. Bestimmen Sie

a) die durch

$$M := \int_K \rho(x_1,x_2,x_3) d(x_1,x_2,x_3)$$

gegebene Masse des Kegels,

b) den Schwerpunkt $S = (S_1, S_2, S_3)$ des Kegels, dessen Koordinaten durch

$$S_j := \frac{1}{M} \int_K x_j \rho(x_1,x_2,x_3) d(x_1,x_2,x_3)$$

für $j = 1,2,3$ gegeben sind.

Aufgabe H3 (Substitutionsregel) (4 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution das Volumen des Ellipsoids

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

wobei $a, b, c > 0$.