Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
29.06.2009

11. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Potentiale)

Wir betrachten das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$(i)\ \ f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1x_2^2 \\ 3x_1^2x_2 \end{pmatrix} \qquad (ii)\ \ f(x) = \begin{pmatrix} e^{x_2}\sin x_1 \\ e^{x_2}\cos x_1 \end{pmatrix}.$$

Besitzt f jeweils ein Potential? Geben Sie gegebenenfalls eine Potentialfunktion φ an.

Lösung: Da $\mathbb{R}^2$ ein konvexes Gebiet ist, besitzt die Funktion f ein Potential genau dann wenn $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$ gilt.

(*i*) $\partial_1 f_2 = 6x_1x_2,\ \ \partial_2 f_1 = 6x_1x_2$. Die Funktion f kann also ein Potential. Diese Bedingung ist notwendig aber nicht hinreichend.

(*ii*) $\partial_1 f_2 = -e^{x_2}\sin x_1,\ \ \partial_2 f_1 = e^{x_2}\sin x_1$. Die Funktion f hat also kein Potential.

Angenommen f besitzt im ersten Fall ein Potential, d.h.

(a) $f_1(x) = \partial_1\varphi(x)$

(b) $f_2(x) = \partial_2\varphi(x)$.

Daraus folgt durch Integration

(a) $\varphi(x_1,x_2) = \int f_1(x_1,x_2)dx_1 + C_1(x_2) = \frac{3}{2}x_1^2x_2^2 + C_1(x_2)$

(b) $\varphi(x_1,x_2) = \int f_2(x_1,x_2)dx_2 + C_2(x_1) = \frac{3}{2}x_1^2x_2^2 + C_2(x_1)$

also gilt $\varphi(x_1,x_2) = \frac{3}{2}x_1^2x_2^2 + C$ für $C \in \mathbb{R}$.

Aufgabe G2 (Nullmengen)

- Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q} \cap [0,1])^2$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.
- Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q} \cap [0,1])^3$ keine Jordan-Nullmenge ist.
- Zeigen Sie, dass $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ eine Jordan-Nullmenge ist.

Lösung:

- Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $q_1, q_2, q_3 \dots$ eine Abzählung von $(\mathbb{Q} \cap [0,1])^2$. Zu $q_j,\ j \in \mathbb{N}$ wählen wir ein abgeschlossenes Rechteck R_j mit Mittelpunkt q_j und Kantenlänge $\frac{\varepsilon}{2^j}$. Dann ist

$$([0,1] \cap \mathbb{Q})^2 \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$$

und
$$\sum_{j=1}^{\infty} |R_j| = \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{\varepsilon}{2^j})^2 = \tfrac{4}{3}\varepsilon^2 < \varepsilon \quad (\text{für } \varepsilon \le \tfrac{3}{4}).$$
Per Definition ist $([0,1] \cap \mathbb{Q})^2$ damit eine Lebesque-Nullmenge.

- Sei $R_1, \dots, R_N$ eine endliche Überdeckung von $(\mathbb{Q} \cap [0,1])^3$ mit abgeschlossenen Boxen.
  Behauptung: Dann gilt $([0,1])^3 \subseteq \bigcup_{j=1}^N R_j$.
  Beweis: Da $R_1, \dots R_N$ abgeschlossen sind, ist auch $\bigcup_{j=1}^N R_j$ abgeschlossen. Wegen $([0,1] \cap \mathbb{Q})^3 \subseteq \bigcup_{j=1}^N R_j$ folgt $[0,1] \times [0,1] \times [0,1] = \overline{[0,1] \cap \mathbb{Q} \times [0,1] \cap \mathbb{Q} \times [0,1] \cap \mathbb{Q}} \subseteq \overline{\bigcup_{j=1}^N R_j} = \bigcup_{j=1}^N R_j$.
  Aus der Behauptung folgt, dass für jede endliche Überdeckung von $([0,1] \cap \mathbb{Q})^3$ gilt
  $$\sum_{j=1}^{N} |R_j| \ge |([0,1])^3| = 1.$$
  Also kann $([0,1] \cap \mathbb{Q})^3$ keine Jordan-Nullmenge sein.
- Es sei $\varepsilon > 0$. Da $\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{n} \le \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \ge N$ gilt. Wir setzen nun
  $$R_1 := \Big[0, \frac{\varepsilon}{2}\Big], R_j := \Big[\frac{1}{j}, \frac{1}{j} + \frac{\varepsilon}{2N}\Big] \;\; (j = 2, \dots, N).$$
  Dann gilt
  $$\{\frac{1}{n} \mid \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} R_j \text{ und } \sum_{j=0}^{N} |R_j| = \frac{\varepsilon}{2} + (N-1) \cdot \frac{\varepsilon}{2N} < \varepsilon.$$
  Also ist $\{\frac{1}{n} \mid \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ eine Jordan-Nullmenge.

Aufgabe G3 (Satz von Fubini)
Berechnen Sie das Integral $\int_A f \, d(x,y)$, wobei ...

(a) A das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ ist und
$$f(x,y) \; := \; x^2 + y^3 + 2xy^2\,;$$

(b) A das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$, (π,π) ist und
$$f(x,y) \; := \; (xy - 3\cos(x+y))\,\chi_T.$$
Dabei sei T das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$.

Lösung: (a) Mit dem Satz von Fubini können wir das zu berechnende Integral zu einem iterierten Integral umschreiben:
$$\begin{aligned}
\int_A f \, d(x,y) &= \int_{[0,1]\times[0,1]} (x^2 + y^3 + 2xy^2)\, d(x,y) \\
&= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} (x^2 + y^3 + 2xy^2)\, dx \right) dy \\
&= \int_{[0,1]} \Big[x^3/3 + xy^3 + x^2y^2\Big]_{x=0}^{x=1} dy \;=\; \int_0^1 (1/3 + y^3 + y^2)\, dy \\
&= \Big[y/3 + y^4/4 + y^3/3\Big]_0^1 \;=\; 1/3 + 1/4 + 1/3 \;=\; 11/12\,.
\end{aligned}$$

(b) Mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\int_A \chi_T \big(xy - 3\cos(x+y)\big)\, d(x,y) \\
&= \int_{[0,\pi]\times[0,\pi]} \chi_T \cdot \big(xy - 3\cos(x+y)\big)\, d(x,y) \\
&= \int_{[0,\pi]} \left(\int_{[0,\pi]} \underbrace{\chi_T}_{=\chi^{[0,\pi]}_{[0,\pi-y]}} \cdot \big(xy - 3\cos(x+y)\big)\, dx \right) dy \\
&= \int_{[0,\pi]} \left(\int_{[0,\pi-y]} \big(xy - 3\cos(x+y)\big)\, dx \right) dy \\
&= \int_{[0,\pi]} \big[x^2 y/2 - 3\sin(x+y)\big]_{x=0}^{x=\pi-y}\, dy \;=\; \int_0^{\pi} \big((\pi-y)^2 y/2 + 3\sin y\big)\, dy \\
&= \int_0^{\pi} \big(\pi^2 y/2 - \pi y^2 + y^3/2 + 3\sin y\big)\, dy \;=\; \big[\pi^2 y^2/4 - \pi y^3/3 + y^4/8 - 3\cos y\big]_0^{\pi} \\
&= \pi^4/4 - \pi^4/3 + \pi^4/8 + 6 \;=\; \pi^4/24 + 6\,.
\end{aligned}
$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Gradientenfelder) (4 Punkte)

Für $x \in \mathbb{R}^3$ sei $\|x\|_2$ die euklidsche Norm. Zeigen Sie, dass folgende Vektorfelder

$$f_n : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3, \quad f_n(x) := \frac{x}{\|x\|_2^n}, n \in \mathbb{N},$$

Gradientenfelder sind, indem Sie die zugehörigen Potentiale $v_n : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ bestimmen.

Lösung: Für $n = 1$: Es muss $f_n = \operatorname{grad} v_n$ gelten. Wir erraten $v_1(x) = \|x\|_2 (+c \in \mathbb{R})$. In der Tat gilt

$$\partial x_j \, v_1 = \frac{1}{\|x\|_2} x_j.$$

Für $n = 2$: Hier fehlt eine zusätzliche Potenz von $\|x\|_2$, das liefert gerade die Ableitung des Logarithmus. Der Ansatz $v_2(x) = \log \|x\|_2 (+c \in \mathbb{R})$ führt zu

$$\partial x_j \, v_2 = \frac{1}{\|x\|_2} x_j \partial x_j \, \|x\|_2 = \frac{1}{\|x\|_2^2} x_j.$$

Für $n \geq 3$ wählen wir den Ansatz $v_n(x) = \alpha \|x\|_2^\beta (+c \in \mathbb{R})$. Es folgt

$$\partial x_j \, v_n = \frac{\alpha\beta}{\|x\|_2^{2-\beta}} x_j.$$

Um die Bedingung $f_n = \operatorname{grad} v_n$ zu erfüllen berechnen wir $\alpha = \frac{-1}{n-2}$ und $\beta = -n + 2$. Also

$$v_n(x) = \frac{-1}{n-2} \|x\|_2^{2-n} (+c \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe H2 (Jordan-Nullmengen) (4 Punkte)

Zeigen Sie: Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine beschränkte Menge mit endlich vielen Häufungspunkten. Dann ist M eine Jordan-Nullmenge.

Lösung: Es seien $x_1, \ldots, x_n$ die Häufungspunkte der Menge $M \subseteq \mathbb{R}^m$. Ferner sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann überdecken wir $x_1, \ldots, x_n$ mit Würfeln $R_1, \ldots R_n$ mit Mittelpunkten $x_1, \ldots, x_n$ und Kantenlänge $\sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{2n}}$. Nun gilt dass x_j, $j = 1 \ldots, n$ im Inneren von R_j liegt.
Angenommen es lägen unendlich viele Punkte aus M außerhalb von $\bigcup_{j=1}^n R_j$. Dann gäbe es eine konvergente Teilfolge in M (Satz von Bolzano-Weierstrass), diese hätte einen Grenzwert, der Häufungspunkt wäre, alle Häufungspunkte liegen aber samt Umgebung in $\bigcup_{j=1}^n R_j$.
Also liegen nur endlich viele Punkte $x_{n+1}, \ldots, x_{n+L} \in M$ außerhalb von $\bigcup_{j=1}^n R_j$. Wir überdecken nun $x_{n+1}, \ldots, x_{n+L}$ mit Würfeln $R_{n+1}, \ldots, R_{n+L}$ mit Kantenlänge $\sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{2L}}$. Dann gilt

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^{n+L} R_j, \qquad \sum_{j=1}^{n+L} |R_j| = n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} + L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon.$$

Aufgabe H3 (Riemann-Integral) (4 Punkte)

Seien $R \subset \mathbb{R}^m$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Rechtecke und $f \colon R \to \mathbb{R}$, $g \colon Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} h \colon R \times Q &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x)g(y) \end{aligned}$$

Riemann-integrierbar ist und dass

$$\int_{R\times Q} h(x,y)d(x,y) = \Big(\int_R f(x)dx\Big)\cdot\Big(\int_Q g(y)dy\Big)$$

gilt.

Lösung: Da f und g Riemann-integrierbar sind, gibt es zu jedem $\varepsilon' > 0$ nach dem Riemann'schen Integrabilitätskriterium Partitionen P_1, P_2 von R bzw. Q mit

$$\begin{aligned} O_R(P_1,f) - U_R(P_1,f) &< \varepsilon' \\ O_Q(P_2,g) - U_Q(P_2,g) &< \varepsilon' \end{aligned}$$

Nehmen wir zuerst an, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in R$ und $g(y) \geq 0$ für alle $y \in Q$ gelte:
Dann ist

$$P_1 \times P_2 = \{S_1 \times S_2 \mid S_1 \in P_1, S_2 \in P_2\}$$

eine Partition von $R \times Q$ und es gilt

$$\begin{aligned} U_{R\times Q}(P_1\times P_2, f\otimes g) &= \sum_{S_1\in P_1}\sum_{S_2\in P_2} \inf_{x\in S_1}\inf_{y\in S_2} f(x)g(y)\cdot|S_1|\cdot|S_2| \\ &= \sum_{S_1\in P_1}\sum_{S_2\in P_2} (\inf_{x\in S_1} f(x)\cdot|S_1|)\cdot(\inf_{y\in S_2} g(y)\cdot|S_2|) \\ &= \Big(\sum_{S_1\in P_1}\inf_{x\in S_1} f(x)\cdot|S_1|\Big)\cdot\Big(\sum_{S_2\in P_2}\inf_{y\in S_2} g(y)\cdot|S_2|\Big) \\ &= U_R(P_1,f)\cdot U_Q(P_2,g) \end{aligned}$$

(Vergleiche Beweis des Satzes von Fubini). Ebenso wird gezeigt

$$O_{R\times Q}(P_1\times P_2, f\otimes g) = O_R(P_1,f)\cdot O_Q(P_2,g).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} & O_{R\times Q}(P_1\times P_2, f\otimes g) - U_{R\times Q}(P_1\times P_2, f\otimes g) \\ =\ & O_R(P_1,f)\cdot O_Q(P_2,g) - U_R(P_1,f)\cdot U_Q(P_2,g) \\ =\ & \underbrace{(O_R(P_1,f) - U_R(P_1,f))}_{\leq\varepsilon'}\cdot O_Q(P_2,g) + U_R(P_1,f)\underbrace{(O_Q(P_2,g) - U_Q(P_2,g))}_{\leq\varepsilon'}. \end{aligned}$$

Da f und g beschränkt sind und R und Q kompakt sind, gibt es ein $M > 0$, so daß

$$O_Q(P_2,g) \leq M, \quad U_R(P_1,f) \leq M$$

gilt, also folgt

$$O_{R\times Q}(P_1\times P_2, f\otimes g) - U_{R\times Q}(P_1\times P_2, f\otimes g) \leq 2M\varepsilon' \overset{!}{\leq} \varepsilon.$$

Da $\varepsilon' > 0$ beliebig war, kann die rechte Seite für passende P_1 und P_2 kleiner als $\varepsilon > 0$ gewählt werden. Damit die Integrabilität von $f \otimes g$ gewährleistet.

Seien nun f und g nicht überall positiv:

Setze

$$c_f = |\min_{x\in R} f(x)|, \quad c_g = |\min_{y\in Q} g(y)|,$$

dies geht, weil R und Q kompakt sind. Die Funktionen $\tilde{f}(x) = f(x)+c_f \geq 0$ und $\tilde{g}(y) = g(y)+c_g \geq 0$ sind ebenfalls Riemann-integrierbar, da die konstanten Funktionen auf Kompakta integrierbar sind und die integrierbaren Funktionen einen Vektorraum bilden.
Es gilt jedoch

$$h(x,y) = f(x)g(y) = (\tilde{f}(x) - c_f)(\tilde{g}(y) - c_g) = \tilde{h}(x,y) - \tilde{g}(y)c_f - \tilde{f}(x)c_g + c_g c_f.$$

Nach obiger Überlegung ist also $\tilde{h}(x,y) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(y)$ auf $R \times Q$ integrierbar. Das Gleiche gilt für die übrigen Summanden. Somit ist h Riemann-integrierbar auf $R \times Q$.

Der Satz von Fubini zeigt die Identität der Integrale.