Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
29.06.2009

11. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Potentiale)
Wir betrachten das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$(i)\ \ f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1x_2^2 \\ 3x_1^2x_2 \end{pmatrix} \qquad (ii)\ \ f(x) = \begin{pmatrix} e^{x_2}\sin x_1 \\ e^{x_2}\cos x_1 \end{pmatrix}.$$

Besitzt f jeweils ein Potential? Geben Sie gegebenenfalls eine Potentialfunktion φ an.

Aufgabe G2 (Nullmengen)

- Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q} \cap [0,1])^2$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.
- Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q} \cap [0,1])^3$ keine Jordan-Nullmenge ist.
- Zeigen Sie, dass $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ eine Jordan-Nullmenge ist.

Aufgabe G3 (Satz von Fubini)
Berechnen Sie das Integral $\int_A f \, d(x,y)$, wobei …

(a) A das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ ist und

$$f(x,y) \ := \ x^2 + y^3 + 2xy^2\,;$$

(b) A das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$, (π,π) ist und

$$f(x,y) \ := \ (xy - 3\cos(x+y))\,\chi_T.$$

Dabei sei T das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Gradientenfelder) (4 Punkte)

Für $x \in \mathbb{R}^3$ sei $\|x\|_2$ die euklidsche Norm. Zeigen Sie, dass folgende Vektorfelder

$$f_n : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3, \quad f_n(x) := \frac{x}{\|x\|_2^n}, n \in \mathbb{N},$$

Gradientenfelder sind, indem Sie die zugehörigen Potentiale $v_n : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ bestimmen.

Aufgabe H2 (Jordan-Nullmengen) (4 Punkte)

Zeigen Sie: Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine beschränkte Menge mit endlich vielen Häufungspunkten. Dann ist M eine Jordan-Nullmenge.

Aufgabe H3 (Riemann-Integral) (4 Punkte)

Seien $R \subset \mathbb{R}^m$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Rechtecke und $f\colon R \to \mathbb{R}$, $g\colon Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass

$$\begin{array}{rcl} h\colon R \times Q & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x)g(y) \end{array}$$

Riemann-integrierbar ist und dass

$$\int_{R\times Q} h(x,y)d(x,y) = \Big(\int_R f(x)dx\Big) \cdot \Big(\int_Q g(y)dy\Big)$$

gilt.