Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
22.07.2009

10. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Länge von Kurven)

Berechnen Sie die Länge der folgenden Kurvenstücke.

a) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$, mit $r, c > 0$,

b) $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $g(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$.

Lösung:

a) Diese Kurve ist eine Helix. Es gilt $f'(t) = (-r \sin t, r \cos t, c)$ und somit $\|f'(t)\|^2 = r^2 + c^2$. Also gilt

$$s(f) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + c^2}\, dt = 2\pi \sqrt{r^2 + c^2}.$$

b) Es gilt $g'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1)$ und somit $\|g'(t)\|^2 = \sinh^2 t + \cosh^2 t + 1 = 2 \cosh^2 t$. Somit gilt

$$s(g) = \int_0^1 \sqrt{2} \cosh t\, dt = \sqrt{2} \sinh 1.$$

Aufgabe G2 (Wegintegral)

Es sei γ der Weg von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$, der sich aus dem durch $X(t) = (t^2, t)$ mit $t \in [0, 1]$ parametrisierten Weg γ_1 und dem Geradenstück γ_2 von $(1, 1)$ nach $(1, 0)$ zusammensetzt. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma F \cdot dX$$

für das Vektorfeld

$$F(x, y) = (2xy - x^2,\ x + y^2).$$

Lösung: $X_1(t) = (t^2, t)$, $t \in [0,1]$, $X_2(t) = (1, 1-t)$, $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot dX &= \int_{\gamma_1} F \cdot dX_1 + \int_{\gamma_2} F \cdot dX_2 \\
&= \int_0^1 (2t^3 - t^4, 2t^2) \cdot (2t, 1)\, dt + \int_0^1 (2(1-t) - 1,\ 1 + (1-t)^2)) \cdot (0, -1)\, dt \\
&= \int_0^1 4t^4 - 2t^5 + 2t^2 - 1 - (1-t)^2\, dt \\
&= \int_0^1 -2t^5 + 4t^4 + t^2 + 2t - 2\, dt \\
&= [-(1/3)t^6 + (4/5)t^5 + (1/3)t^3 + t^2 - 2t]_{t=0}^1 \\
&= -(1/3) + (4/5) + (1/3) + 1 - 2 = -1/5
\end{aligned}$$

Aufgabe G3 (Zykloide)

Gegeben ist der Zykloidenbogen

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a(t - \sin(t)) \\ a(1 - \cos(t)) \end{pmatrix},\ t \in [0, 2\pi),\ a > 0.$$

a) Berechnen Sie seine Länge $s(\gamma)$.

b) Parametrisieren Sie den Zykloidenbogen als Funktion $\delta(\tau)$ nach der Bogenlänge um und zeigen Sie, dass $\|\delta'(\tau)\| = 1$ gilt.
Hinweis: $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ und $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

Lösung: Es gilt

$$\gamma'(t) = a \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

also $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}a\sqrt{1 - \cos(t)}$.

a) Die Länge $s(\gamma)$ berechnet man durch

$$\begin{aligned}
s(\gamma) &= \int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t^2)}\, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt \\
&= 2a \int_0^{2\pi} \sin(\tfrac{t}{2})\, dt = -4a\cos(\tfrac{t}{2})|_0^{2\pi} = 8a
\end{aligned}$$

b) Analog zu a) ergibt sich

$$s(t) = \int_0^t a\sqrt{(1-\cos x)^2 + (\sin x^2)}\, dx = -4a\cos(\tfrac{x}{2})|_0^t = 4a(1 - \cos(\tfrac{t}{2})).$$

Nach t auflösen ergibt

$$\cos\frac{t}{2} = 1 - \frac{s(t)}{4a}, \quad t(s) = 2\arccos(1 - \frac{s}{4a}).$$

Wir setzen $\delta : [0, 8a) \to \mathbb{R}^2$, $\delta(\tau) = \gamma(t(\tau))$.

$$\delta_1(s) = a(2\arccos(1 - \frac{s}{4a}) - \sin(2\arccos(1 - \frac{s}{4a})))$$

$$\delta_2(s) = a(1 - \cos(2\arccos(1 - \frac{s}{4a}))) = a(1 - 2\cos^2(\arccos(1 - \frac{s}{4a})) + 1) = 2a - 2a(1 - \frac{s}{4a})^2$$

Es gilt

$$\delta_1'(s) = a\left(2\frac{(-1)(-\frac{1}{4a})}{\sqrt{1-(1-\frac{s}{4a})^2}} - \cos(2\arccos(1-\frac{s}{4a}))2\frac{(-1)(-\frac{1}{4a})}{\sqrt{1-(1-\frac{s}{4a})^2}}\right) = \sqrt{1-(1-\frac{s}{4a})^2}$$

und

$$\delta_2'(s) = 1 - \frac{s}{4a}.$$

Somit

$$\|\delta'(s)\| = 1.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Wegintegral) (4 Punkte)

Berechnen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 : (x) \mapsto \frac{1}{\|x\|^3}\, x,$$

das Wegintegral über den Weg

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2\sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi.$$

Lösung: Wir berechnen $\int_\gamma f \cdot dx$ direkt mit der Definition. Dazu verwenden wir die Substitution $u = \sin\dfrac{t}{2}$ und $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}$.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f \cdot dx &= \int_0^{4\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{4\pi} \frac{1}{\left(1 + 4\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \left(\cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{4\pi} \frac{1}{\left(1 + 4\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2\right)^{3/2}}\, 2\left(\sin\frac{t}{2}\right)\left(\cos\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^0 \frac{4}{(1+4u^2)^{3/2}}\, u\, \mathrm{d}u \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Kurven in Polardarstellung) (2+2 Punkte)

Es sei $r : [0, 2\pi] \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion, die stetig differenzierbar sei auf $(0, 2\pi)$ und deren Ableitung beschränkt sei. Wir definieren weiter

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto (r(t)\cos t, r(t)\sin t).$$

a) Begründen Sie, dass γ rektifizierbar ist. Zeigen Sie, dass die Bogenlänge von γ gegeben ist durch

$$s(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}\, dt.$$

b) Skizzeren Sie das Bild von γ für $r(t) = 1 + \cos t$ und berechnen Sie die Bogenlänge.

Lösung:

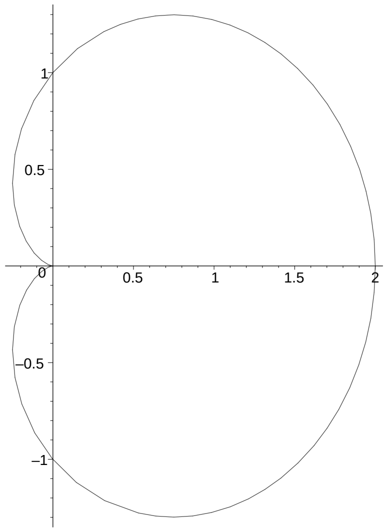
a) Der Weg γ ist stetig differenzierbar und daher rektifizierbar. Die Produktregel der Differentialrechnung liefert

$$\gamma'(t) = r'(t) \cdot (\cos t, \sin t) + r(t) \cdot (-\sin t, \cos t).$$

Weil $(\cos t, \sin t)$ und $(-\sin t, \cos t)$ zueinander orthogonale Einheitsvektoren sind, erhalten wir

$$\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t))^2}.$$

Nach der Formel für die Bogenlänge folgt die Behauptung.



c) Im Fall $r(t) = 1 + \cos t$ gilt $r'(t)^2 + r(t)^2 = 1 + 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2(1 + \cos t)$. Deshalb,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2} dt &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt \\ &= 2\sqrt{2}[-2\sqrt{1-u}]_{-1}^{1} \quad \text{subst. } u = \cos t \\ &= 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \\ &= 8.\end{aligned}$$

Aufgabe H3 (Eine Kurve) (0,5+1,5+1,5+0,5 Punkte)

Sei B eine Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt (0, 0). Der Kreis mit Radius $\frac{1}{4}$ und Mittelpunkt $(\frac{3}{4}, 0)$ werde wie ein Rad auf dem inneren Rand von B entlanggerollt, so dass $m(t) := \frac{3}{4}(\cos t, \sin t)$ der Mittelpunkt zum Zeitpunkt t ist. Es sei $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ der Weg, den der am Anfang auf $(1, 0)$ liegende Punkt dabei durchläuft.

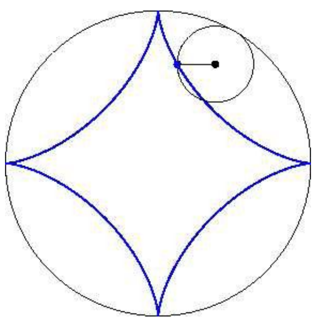
a) Skizzieren Sie die Kurve.

b) Sei $v(t) = c(t) - m(t)$. Zeigen Sie: $v(t) = \frac{1}{4}(\cos(t - 4t), \sin(t - 4t))$.

c) Folgern Sie: $c(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$. Tipp: Verwenden Sie $(e^{it})^3$.

d) Für welche $t \in [0, 2\pi]$ gilt $c'(t) = 0$.

Lösung:

a) 

b) Auf einem Viertel des großen Kreises rollt der kleine genau einmal ab, $v(t)$ rotiert im Uhrzeigersinn und dreht sich bei der Rotation des kleinen Kreises ($t = \frac{\pi}{2}$) um den Winkel $\frac{-3}{2}\pi = -3t_0$. Also $v(t) = \frac{1}{4}(\cos(-3t), \sin(-3t))$.

c) Aus b) folgt

$$c(t) = m(t) - v(t) = \left(\tfrac{3}{4}\cos(t) + \tfrac{1}{4}\cos(3t), \tfrac{3}{4}\sin(t) - \tfrac{1}{4}\sin(3t),\right).$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme

$$\sin^3(t) = \left(\tfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3 = \tfrac{e^{3it}-e^{-3it}}{-4(2i)} + \tfrac{3e^{it}-3e^{-it}}{4(2i)} = \tfrac{3}{4}\sin(t) - \tfrac{1}{4}\sin(3t)$$

und

$$\cos^3(t) = \tfrac{3}{4}\cos(t) + \tfrac{1}{4}\cos(3t),$$

folgt

$$c(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

d) Es gilt $c'(t) = (-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t))$ und somit $c'(t_0) = 0$ für $t_0 \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$. Dies sind die vier Eckpunkte der Astroide.