Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
15.06.2009

# 9. Übungsblatt zur „Analysis II“

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Test)

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Fügen Sie Implikationspfeile ($\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) ein, um zu zeigen, welche Eigenschaft eine andere impliziert. Begründen Sie, ggf. durch ein Gegenbeispiel.

$\boxed{f \text{ ist stetig}}$

$\boxed{\text{die Jacobi-Matrix existiert}}$

$\boxed{f \text{ ist stetig partiell differenzierbar}}$

$\boxed{f \text{ ist differenzierbar}}$

$\boxed{f \text{ ist stetig differenzierbar}}$

$\boxed{f \text{ ist partiell differenzierbar}}$

$\boxed{\text{die Jacobi-Matrix ist stetig}}$

**Lösung:**

- $f$ ist partiell differenzierbar $\Leftrightarrow$ die Jacobi-Matrix existiert
  (folgt aus der Definition der Jacobi-Matrix)
- $f$ ist stetig partiell differenzierbar $\Leftrightarrow$ die Jacobi-Matrix ist stetig $\Leftrightarrow$ $f$ ist stetig differenzierbar
  (folgt aus der Definition der Jacobi-Matrix und dem Satz aus der Vorlesung)
- $f$ ist stetig differenzierbar $\Rightarrow$ f ist differenzierbar
  (eine Eigenschaft weniger...)
- $f$ ist differenzierbar $\Rightarrow$ $f$ ist stetig.
  (folgt aus der Definition der Differenzierbarkeit)
- $f$ ist differenzierbar $\Rightarrow$ $f$ ist partiell differenzierbar
  (folgt aus der Definition der Differenzierbarkeit)
- Differenzierbare Funktionen müssen nicht stetig differenzierbar sein.
  Beispiel: $f(x) = x^2 \sin(1/x)$
  ($f$ ist stetig und differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ für $x \neq 0$ und $f'(0) = 0$, aber $f'(1/(2\pi n)) \to -1$ für $n \to \infty$.)

- Partiell differenzierbare Funktionen müssen nicht stetig sein. Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ (für $(x,y) \neq (0,0)$ und $t \neq 0$ ist $f(tx,ty) = f(x,y)$, daher existieren die partiellen Ableitungen in $(0,0)$ und sind gleich 0. $f(tx,ty)$ kann aber für $t \to 0$ jeden Wert zwischen $-1$ und 1 annehmen, f ist also nicht stetig.)
- Partiell differenzierbare Funktionen müssen nicht differenzierbar sein.
  Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ ($f$ ist partiell differenzierbar, aber nicht stetig und kann somit auch nicht differenzierbar sein.)

**Aufgabe G2** (Implizite Funktionen)

Gegeben sei die Funktion $g(x,y) = 12y^5 - 20xy^3 + 5x^4$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) In der Umgebung welcher Punkte ist durch die Gleichung $g(x,y) = 0$ implizit eine Funktion $y = f(x)$ bestimmt?

b) Berechnen Sie dort $f'(x)$ implizit.

**Lösung:** a) Es gilt $g_y(x,y) = 60y^2(y^2 - x)$. Also existiert für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} &g(x_0, y_0) = 0, \\ &y_0 \neq 0 \quad \text{und} \\ &y_0 \neq \pm\sqrt{x_0} \end{aligned}$$

eine Umgebung $U$ von $x_0$ und eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $y_0 = f(x_0)$ und $g(x, f(x)) = 0$ für $x \in U$.

b) Es gilt

$$f'(x_0) = -\frac{x_0^3 - y_0^3}{3y_0^2(y_0^2 - x_0)}.$$

**Aufgabe G3** (Extrema unter Nebenbedingungen)

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad f(x,y) = \exp(x + 2y), \\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 4. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Extrema von $f$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.

**Lösung:** Lagrange-Funktion:

$$L(r, h, \lambda) = \exp(x + 2y) + \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Ableitungen:

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= \exp(x + 2y) + 2\lambda x \stackrel{!}{=} 0, \\ L_y(x,y,\lambda) &= 2\exp(x + 2y) + 2\lambda y \stackrel{!}{=} 0, \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 4 \stackrel{!}{=} 0, \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $y = 2x$ und mit der dritten Gleichung erhält man

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad y_1 = \frac{4}{\sqrt{5}}, \\ x_2 &= -\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad y_2 = -\frac{4}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $f(x_1, y_1) = \exp(10/\sqrt{5})$ (Maximum), $f(x_2, y_2) = \exp(-10/\sqrt{5})$ (Minimum).

# Hausübung

**Aufgabe H1** (Umkehrbarkeit) (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \cos x_1 \\ x_2 e^{x_1 x_2} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = z$ für $z \in \mathbb{R}^2$ in der Nähe von $(0, 0)$ eine eindeutige Lösung $x = g(z)$ besitzt. Zeigen Sie, dass $g$ in einer Umgebung von $(0, 0)$ stetig differenzierbar ist und berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_g(0, 0)$.

**Lösung:** Als Verkettung stetig differenzierbarer Funktionen ist $f$ stetig differenzierbar. $f(0, 0) = (0, 0)$ und

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 - x_2 \sin x_1 & \cos x_1 \\ x_2^2 e^{x_1 x_2} & e^{x_1 x_2} + x_1 x_2 e^{x_1 x_2} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det J_f(0, 0) = 1 \neq 0.$$

Somit existiert eine Umgebung $U$ von $(0, 0)$ im $\mathbb{R}^2$ in der $f$ injektiv ist und eine stetig differenzierbare Funktion $g : f(U) \to U$. $f(U)$ ist eine Umgebung von $(0, 0)$ in der $x = g(z)$ für $f(x) = z$ eindeutig gelöst ist. Außerdem gilt

$$J_g(0, 0) = J_f(0, 0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe H2** (Implizite Funktionen) (2+2 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass es für eine genügend klein gewählte Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0, -1)$ eindeutig bestimmte Abbildungen $g : U \to \mathbb{R}$ und $h : U \to \mathbb{R}$ mit $g(0, -1) = 0$, $h(0, -1) = 1$ und

$$\begin{aligned} g(x, y) + \cos(g(x, y)h(x, y)) &= h(x, y)x + 1, \\ \sin(g(x, y)) &= y + h(x, y) \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in U$ gibt.

b) Berechnen Sie $\frac{\partial g}{\partial x}(0, -1)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(0, -1)$, $\frac{\partial h}{\partial x}(0, -1)$ und $\frac{\partial h}{\partial y}(0, -1)$.

**Lösung:** Wir benutzen den Satz über implizite Funktionen für

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} u + \cos(uv) - vx - 1 \\ \sin(u) - y - v \end{pmatrix}.$$

Für $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, -1, 0, 1)$ ist $f(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 0)^T$. Außerdem ist $f$ stetig differenzierbar. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0, -1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 - v\sin(uv) & -u\sin(uv) \\ \cos u & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g,h)}{\partial(u,v)}(0, -1) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0, -1, 0, 1)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(0, -1, 0, 1) \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das heißt

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,-1) = 1,\ \frac{\partial g}{\partial y}(0,-1) = 0,\ \frac{\partial h}{\partial x}(0,-1) = 1,\ \frac{\partial h}{\partial y}(0,-1) = -1..$$

**Aufgabe H3** (Simplex) (1+2+1 Punkte)

Man betrachte die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ und $g(x) = x_1 + \ldots + x_n$, sowie das kompakte $(n-1)$–Simplex $\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 1 \text{ und } x_1, \ldots, x_n \geq 0\}$.

a) Überprüfen Sie (ohne Ableiten), dass das Minimum von $f$ auf $\Sigma$ gleich Null ist.

b) Zeigen Sie, dass das Maximum von $f$ auf $\Sigma$ gleich $\frac{1}{n^n}$ ist.

c) Folgern Sie aus b), dass für alle $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ gilt:

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leq \frac{(x_1 + \ldots + x_n)^n}{n^n}.$$

**Lösung:**

a) Für $x = (1, 0, \ldots, 0) \in \Sigma$ ist $f(x) = 0$, andereseits ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \Sigma$ somit ist Null das Minimum.

b) Wir suchen ein Maximum für $f$ unter der Nebenbedingung $h(x) = g(x) - 1 = 0$.
Betrachte $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda h(x)$. Das Extremum erfüllt mit $\lambda \in \mathbb{R}$ die Bedingung

$$L_x(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{grad} f(x) = -\lambda \operatorname{grad} h(x) = -\lambda(1, \ldots, 1)^T,$$

also ist $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_n = \lambda$ für $i = 1, \ldots, n$.
Für $\lambda = 0$ folgt $f(x) = 0$, sonst folgt aus $L_\lambda(x, \lambda) - 0$, $x_i = x_j$ für alle $i, j$. Einsetzen in $h$ ergibt $nx_i = 1$, d.h. $x_i = 1/n$. Somit ist $x^* = 1/n(1, \ldots, 1)^T$ ein Kanidat für ein lokales Extremum. $f(x^*) = 1/n^n > 0$. Es handelt sich um ein Maximum, da $\Sigma$ kompakt ist.

c) Sei $\bar{x} = \left(\frac{x_1}{(x_1+\ldots+x_n)}, \frac{x_2}{(x_1+\ldots+x_n)}, \ldots, \frac{x_n}{(x_1+\ldots+x_n)}\right)^T$. Es gilt $\bar{x} \in \Sigma$. Somit ist $f(\bar{x}) \leq f(x^*)$, einsetzen ergibt

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leq \frac{(x_1 + \ldots + x_n)^n}{n^n}.$$