Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
15.06.2009

9. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Test)

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Fügen Sie Implikationspfeile ($\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) ein, um zu zeigen, welche Eigenschaft eine andere impliziert. Begründen Sie, ggf. durch ein Gegenbeispiel.

	f ist stetig
die Jacobi-Matrix existiert	
	f ist stetig partiell differenzierbar
f ist differenzierbar	
	f ist stetig differenzierbar
f ist partiell differenzierbar	
	die Jacobi-Matrix ist stetig

Aufgabe G2 (Implizite Funktionen)

Gegeben sei die Funktion $g(x, y) = 12y^5 - 20xy^3 + 5x^4$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) In der Umgebung welcher Punkte ist durch die Gleichung $g(x, y) = 0$ implizit eine Funktion $y = f(x)$ bestimmt?

b) Berechnen Sie dort $f'(x)$ implizit.

Aufgabe G3 (Extrema unter Nebenbedingungen)

Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \exp(x + 2y),$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 4.$$

Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Umkehrbarkeit) (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \cos x_1 \\ x_2 e^{x_1 x_2} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = z$ für $z \in \mathbb{R}^2$ in der Nähe von $(0,0)$ eine eindeutige Lösung $x = g(z)$ besitzt. Zeigen Sie, dass g in einer Umgebung von $(0,0)$ stetig differenzierbar ist und berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_g(0,0)$.

Aufgabe H2 (Implizite Funktionen) (2+2 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass es für eine genügend klein gewählte Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,-1)$ eindeutig bestimmte Abbildungen $g : U \to \mathbb{R}$ und $h : U \to \mathbb{R}$ mit $g(0,-1) = 0$, $h(0,-1) = 1$ und

$$\begin{aligned} g(x,y) + \cos(g(x,y)h(x,y)) &= h(x,y)x + 1, \\ \sin(g(x,y)) &= y + h(x,y) \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in U$ gibt.

b) Berechnen Sie $\frac{\partial g}{\partial x}(0,-1)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(0,-1)$, $\frac{\partial h}{\partial x}(0,-1)$ und $\frac{\partial h}{\partial y}(0,-1)$.

Aufgabe H3 (Simplex) (1+2+1 Punkte)

Man betrachte die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ und $g(x) = x_1 + \ldots + x_n$, sowie das kompakte $(n-1)-$Simplex $\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 1 \text{ und } x_1, \ldots, x_n \geq 0\}$.

a) Überprüfen Sie (ohne Ableiten), dass das Minimum von f auf Σ gleich Null ist.

b) Zeigen Sie, dass das Maximum von f auf Σ gleich $\frac{1}{n^n}$ ist.

c) Folgern Sie aus b), dass für alle $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ gilt:

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leq \frac{(x_1 + \ldots + x_n)^n}{n^n}.$$