Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
08.06.2009

8. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)

In den folgenden Aussagen fehlt jeweils eine Voraussetzung. Geben Sie sie an.

a) Die Hesse-Matrix jeder Funktion ist symmetrisch.

b) Das Bild von kompakten Mengen unter beliebigen Abbildungen ist kompakt.

c) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und $a \in U$. Dann besitzt f eine lokale Umkehrfunktion in a.

d) Sei X ein metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion. Dann hat f einen Fixpunkt.

e) Jede partiell differenzierbare Abbildung ist auch differenzierbar.

f) Sei U offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $x \in U$ mit negativ definiter Hesse-Matrix. Dann hat f ein lokales Maximum in x.

g) Jede Folge (x_k) in einem metrischen Raum X besitzt eine konvergente Teilfolge.

Lösung:

a) Die Hesse-Matrix jeder <u>zweimal stetig differenzierbaren</u> Funktion ist symmetrisch.

b) Das Bild von kompakten Mengen unter <u>stetigen</u> Abbildungen ist kompakt.

c) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und $a \in U$. Dann besitzt f eine lokale Umkehrfunktion in a, $\underline{\text{wenn } \det(J_f(a)) \neq 0 \text{ gilt}}$.

d) Sei X ein <u>vollständiger</u> metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion. Dann hat f einen Fixpunkt.

e) Jede <u>stetig</u> partiell differenzierbare Abbildung ist auch differenzierbar.

f) Sei U offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $x \in U$ mit negativ definiter Hesse-Matrix $\underline{\text{und } \operatorname{grad} f(x) = 0}$. Dann hat f ein lokales Maximum in x.

g) Jede Folge (x_k) in einem <u>kompakten</u> metrischen Raum X besitzt eine konvergente Teilfolge.

Aufgabe G2 (Invertierbare Matrizen)

Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Raum der $n \times n$-Matrizen.

a) Zeigen Sie, dass die Neumann-Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} B^k$$

für $\|B\| < 1$ konvergiert.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Neumann-Reihe, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|\mathbb{1} - A\| < 1$ ($\|\cdot\|$ die Operatornorm) die Abbildung A invertierbar ist.

c) Die Menge aller invertierbaren $n \times n$-Matrizen wird als $GL(n)$ bezeichnet. Beweisen Sie mit Hilfe der Neumann-Reihe, dass die Abbildung

$$\mathrm{inv} : GL(n) \to GL(n), \quad A \mapsto A^{-1},$$

stetig ist.
Tipp: Nehmen Sie $\|B - A\| < \frac{1}{1+\|A^{-1}\|}$ an und schätzen Sie $\|B^{-1}\|$ mit Hilfe von $B^{-1}A$ ab.

Lösung:

a) Da $\|\cdot\|$ die Operatornorm ist, gilt $\|B^k\| \leq \|B\|^k$. Also gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|B^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|B\|^k = \frac{1}{1-\|B\|} < \infty.$$

Somit haben wir eine konvergente Majorante gefunden, das heißt $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ ist absolut konvergent, also konvergent.

b) Man rechnet nach

$$A\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbb{1} - A)^k = (\mathbb{1} - (\mathbb{1} - A))\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbb{1} - A)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathbb{1} - A)^k - \sum_{k=0}^{\infty}(\mathbb{1} - A)^{k+1} = (\mathbb{1} - A)^0 = \mathbb{1}.$$

Das beweist dass A invertierbar ist.

c) Zum Beweis der Stetigkeit nehmen wir wieder an, dass $\|B - A\| < \frac{1}{1+\|A^{-1}\|}$ gilt. Außerdem gilt $B^{-1}A = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathbb{1} - A^{-1}B)^k$. Dann hat man

$$\|B^{-1}\| = \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbb{1} - A^{-1}B)^k\right) A^{-1} \right\| \leq \|A^{-1}\| \sum \left(\frac{\|A^{-1}\|}{1+\|A^{-1}\|}\right)^k =: c.$$

somit schätzt man ab:

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| = \|A^{-1}(B - A)B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|\|B - A\|c \xrightarrow{B\to A} 0.$$

Aufgabe G3 (Banachscher Fixpunktsatz)
Es sei $M := \mathbb{R}^2$ und $d(x, y) := ||x - y||_\infty$. Zeigen Sie, dass

$$f : M \to M \ , f(x) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Berechnen Sie die ersten zwei Schritte der Fixpunktiteration für $x_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Fixpunkt direkt.

Lösung:

- Nachweis mit dem Banach'schen Fixpunktsatz:

  (i) $M = \mathbf{R}^2$ ist abgeschlossen und $f(M) \subset M$.

(ii) Außerdem ist die Kontraktionseigenschaft zu zeigen:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(x_1 - y_1) + \frac{1}{4}(x_2 - y_2) \\ \frac{1}{2}(x_1 - y_1) + \frac{3}{8}(x_2 - y_2) \end{pmatrix} \right\|_\infty \\ &\leq \max\{\tfrac{3}{8}, \tfrac{7}{8}\} \|x - y\|_\infty \leq \tfrac{7}{8} \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

- $$x_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad x_1 = f(x_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad x_2 = f(x_1) = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Der Fixpunkt löst die Gleichung

$$\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x^* + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x^*.$$

Es gilt

$$\frac{1}{8} x^* = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{27} \\ \frac{11}{27} \end{pmatrix}.$$

Und somit $x^* = \begin{pmatrix} \frac{56}{27} \\ \frac{88}{27} \end{pmatrix}$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Lokale Umkehrbarkeit) (1+1+2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

für jedes $(x,y) \neq (0,0)$ lokal umkehrbar ist.

b) Ist F auch global umkehrbar?

c) Bestimmen Sie das Urbild $F^{-1}(\{(a,b)\})$ eines beliebigen Punktes $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Lösung:

a) Offensichtlich ist F stetig differenzierbar. Für die lokale Umkehrung müssen wir zeigen, dass $F'(x,y)$ für alle $(x,y) \neq 0$ invertierbar ist. Da gilt

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \det(F'(x,y)) = 4(x^2+y^2)$$

folgt, dass $F'(x,y)$ für alle $(x,y) \neq 0$ invertierbar ist.

b) Die Funktion F ist aber nicht global invertierbar, denn F ist nicht injektiv: Ist $F(x,y) = (a,b)$, so gilt auch $F(-x,-y) = (a,b)$.

c) Nun wollen wir das Urbild eines beliebigen Punktes $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ bestimmen: Sei $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ beliebig. Wir suchen die Menge alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $F(x,y) = (a,b)$. Es gilt

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \implies 2xy = b.$$

Wir untersuchen nun zwei Fälle:

- $b \neq 0$:
  Dann gilt $y \neq 0$ und damit $x = \frac{b}{2y}$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{4y^2} - y^2 = a \quad &\overset{y\neq 0}{\iff} \quad y^4 + ay^2 - \frac{b^2}{4} = 0 \implies y^2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} \\ &\overset{y^2\geq 0}{\implies} \quad y^2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} \\ &\implies \quad y = \pm\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \quad x = \pm \frac{b}{2\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}} \end{aligned}$$

- $b = 0$:
  Dann gilt $x = 0$ oder $y = 0$ (und $a \neq 0$). Ist $a > 0$, so muß $y = 0$ und $x = \pm\sqrt{a}$ gelten. Ist $a < 0$, so muß $x = 0$ und $y = \pm\sqrt{a}$ gelten.

Aufgabe H2 (Schwach kontrahierende Abbildungen) (4 Punkte)

Sei X ein (folgen-)kompakter metrischer Raum. Wir betrachten eine Funktion $\phi : X \to X$. Zeigen Sie:
Sei ϕ schwach kontrahierend ist, d.h., für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt

$$d(\phi(x), \phi(y)) < d(x,y).$$

Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt x^* von ϕ in X.

Lösung: Man definiere die Abbildung $\psi : X \to X$ mit $\psi(x) = d(\phi(x), x)$. Da es sich um eine stetige Abbildung auf einem Kompaktum handelt nimmt sie ein Minumum an. Wir nehmen an dieses läge im Punkt $\bar{x}$. Ist $\psi(\bar{x}) = 0$ so ist $\bar{x}$ ein Fixpunkt, wir nehmen an $\psi(\bar{x}) > 0$. Aufgrund der schwachen Kontraktion gilt

$$\psi(\bar{x}) = d(\phi(\bar{x}), \bar{x}) > d(\phi(\phi(\bar{x})), \phi(\bar{x})) = \psi(\phi(\bar{x})).$$

Das widerspricht der Annahme, dass ψ an der Stelle $\bar{x}$ ein Minimum hat. Somit gibt es ein x^* mit $\psi(x^*) = 0$, dies ist ein Fixpunkt von ϕ.
Die Eindeutigkeit beweist man wie zuvor:
Seien $x^* \neq y^*$ Fixpunkte dann würde

$$d(x^*, y^*) > d(\phi(x^*), \phi(y^*)) = d(x^*, y^*)$$

gelten, dies ist unmöglich, somit muss $x^* = y^*$ sein.

Aufgabe H3 (Invertierbare Matrizen (Teil 2)) (2+2 Punkte)

a) Es sei $\|B\| \leq \frac{1}{1+\|A^{-1}\|}$. Zeigen Sie, dass $A + B$ invertierbar ist und

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(A^{-1}B)^n A^{-1}$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung inv aus G2 differenzierbar ist, und geben Sie die Ableitung $\mathrm{inv}'(A)$ an. Geben Sie auch an, in welchem Funktionenraum $\mathrm{inv}'(A)$ liegt.

Lösung:

a) Es gilt

$$(A + B) = A(\mathbb{1} + A^{-1}B)$$

und somit ist nur zu zeigen, dass $\mathbb{1} + A^{-1}B$ invertierbar ist:

$$\|A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\| \tfrac{1}{1+\|A^{-1}\|} < 1.$$

Das Inverse von $A + B$ ist

$$\mathrm{inv}(A + B) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)(A^{-1}B)^n A^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(A^{-1}B)^n A^{-1}.$$

b) Der dritte Term der obigen Summe sei $g(B)$. Wir zeigen, dass $\frac{\|g(B)\|}{\|B\|} \to 0$ für $\|B\| \to 0$:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\|A^{-1}\|\|B\|)^n\|A^{-1}\| = \sum_{n=1}^{\infty}(\|A^{-1}\|\|B\|)^n\|A^{-1}\|^2\|B\| = \left(\tfrac{\|A^{-1}\|^3\|B\|}{1-\|A^{-1}\|\|B\|}\right)\|B\|$$

Es folgt

$$\left(\tfrac{\|A^{-1}\|^3\|B\|}{1-\|A^{-1}\|\|B\|}\right) \to 0 \text{ für } \|B\| \to 0.$$

Die Ableitung ist die lineare Abbildung $F'(A) : GL(n) \to GL(n)$ die B auf $-A^{-1}BA^{-1}$ abbildet.