Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
08.06.2009

8. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)
In den folgenden Aussagen fehlt jeweils eine Voraussetzung. Geben Sie sie an.

a) Die Hesse-Matrix jeder Funktion ist symmetrisch.
b) Das Bild von kompakten Mengen unter beliebigen Abbildungen ist kompakt.
c) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und $a \in U$. Dann besitzt f eine lokale Umkehrfunktion in a.
d) Sei X ein metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion. Dann hat f einen Fixpunkt.
e) Jede partiell differenzierbare Abbildung ist auch differenzierbar.
f) Sei U offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $x \in U$ mit negativ definiter Hesse-Matrix. Dann hat f ein lokales Maximum in x.
g) Jede Folge (x_k) in einem metrischen Raum X besitzt eine konvergente Teilfolge.

Aufgabe G2 (Invertierbare Matrizen)
Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Raum der $n \times n$-Matrizen.

a) Zeigen Sie, dass die Neumann-Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} B^k$$
für $\|B\| < 1$ konvergiert.
b) Zeigen Sie mit Hilfe der Neumann-Reihe, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|\mathbb{1} - A\| < 1$ ($\|\cdot\|$ die Operatornorm) die Abbildung A invertierbar ist.
c) Die Menge aller invertierbaren $n \times n$-Matrizen wird als $GL(n)$ bezeichnet. Beweisen Sie mit Hilfe der Neumann-Reihe, dass die Abbildung
$$\mathrm{inv} : GL(n) \to GL(n), \quad A \mapsto A^{-1},$$
stetig ist.
Tipp: Nehmen Sie $\|B - A\| < \frac{1}{1+\|A^{-1}\|}$ an und schätzen Sie $\|B^{-1}\|$ mit Hilfe von $B^{-1}A$ ab.

Aufgabe G3 (Banachscher Fixpunktsatz)
Es sei $M := \mathbb{R}^2$ und $d(x, y) := ||x - y||_\infty$. Zeigen Sie, dass
$$f : M \to M\ , f(x) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Berechnen Sie die ersten zwei Schritte der Fixpunktiteration für $x_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Fixpunkt direkt.

Hausübung

Aufgabe H1 (Lokale Umkehrbarkeit) (1+1+2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit
$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$
für jedes $(x, y) \neq (0, 0)$ lokal umkehrbar ist.
b) Ist F auch global umkehrbar?
c) Bestimmen Sie das Urbild $F^{-1}(\{(a, b)\})$ eines beliebigen Punktes $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Aufgabe H2 (Schwach kontrahierende Abbildungen) (4 Punkte)
Sei X ein (folgen-)kompakter metrischer Raum. Wir betrachten eine Funktion $\phi : X \to X$. Zeigen Sie:
Sei ϕ schwach kontrahierend ist, d.h., für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt
$$d(\phi(x), \phi(y)) < d(x, y).$$
Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt x^* von ϕ in X.

Aufgabe H3 (Invertierbare Matrizen (Teil 2)) (2+2 Punkte)

a) Es sei $\|B\| \leq \frac{1}{1+\|A^{-1}\|}$. Zeigen Sie, dass $A + B$ invertierbar ist und
$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (A^{-1}B)^n A^{-1}$$
gilt.
b) Zeigen Sie, dass die Abbildung inv aus G2 differenzierbar ist, und geben Sie die Ableitung $\mathrm{inv}'(A)$ an. Geben Sie auch an, in welchem Funktionenraum $\mathrm{inv}'(A)$ liegt.