Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
02.06.2009

7. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Der Affensattel)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung f' von f.

(b) Bestimmen Sie die Hessematrix $H_f = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j}$ an der Stelle 0.

(c) Ist H_f positiv (semi-)definit, indefinit oder negativ (semi-)definit?

(d) Hat die Funktion f an der Stelle 0 ein Extremum?

Lösung: Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

(a) $\mathcal{J}_f = (3x^2 - 3y^2, -6xy)$

(b) $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}$, $H_f(0, 0) = \mathbf{0}$

(c) Die Hessematrix ist semidefinit.

(d) Nein, dies ist ein Sattelpunkt, zum Beispiel für $k > 0$ den Wert für (k, k) und $(-k, k)$ betrachten.

Aufgabe G2 (Metriken)

a) Zeigen Sie, dass durch

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert ist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ bezüglich dieser Metrik nicht vollständig ist.

b) **Französische Eisenbahnmetrik:**
Zeigen Sie, dass durch

$$d_{\text{SNCF}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ d_{\text{SNCF}}(x, y) = \begin{cases} \|x - y\| & \text{falls } y = t \cdot x \text{ für ein } t \in \mathbb{R}, \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Metrik auf dem $\mathbb{R}^2$ definiert ist.

Lösung:

a) – *Positivität:* arctan : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine injektive Abbildung. Daher folgt aus $d(x, y) = 0$ sofort $x = y$. Die Rückrichtung ist trivial.

- *Symmetrie:*

$$d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| = |(-1)(\arctan(x) - \arctan(y))| = |\arctan(y) - \arctan(x)| = d(y,x)$$

- *Dreiecksungleichung:*

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |\arctan(x) - \arctan(z)| = |\arctan(x) - \arctan(y) + \arctan(y) - \arctan(z)| \\ &= |\arctan(x) - \arctan(y)| + |\arctan(y) - \arctan(z)| = d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

Somit ist $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

Wir betrachten die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n = n$. Für $\epsilon > 0$, $N_\epsilon = \lceil \tan(\frac{\pi}{2} - \epsilon) \rceil$ und $n > k > N_\epsilon$ gilt

$$d(x_n, x_k) = |\arctan n - \arctan k| < |\tfrac{\pi}{2} - \arctan N_\epsilon| = \epsilon.$$

Somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. der betrachten Metrik, aber sie konvergiert nicht.

b)
- *Positivität:* $|x - y| \geq 0$, $|x| + |y| \geq 0$ und $|x| + |y| = 0$ oder $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$
- *Symmetrie:* $d(x,y) = |x - y| = |y - x| = d(y,x)$ falls $x = \lambda y$ (daher $y = \frac{1}{\lambda} x$) und $d(x,y) = |x| + |y| = |y| + |x| = d(y,x)$ sonst.
- *Dreiecksungleichung:* Man muss vier Fälle unterscheiden:
  1.Fall: $x = \lambda y = \mu z$ in diesem Fall ist die Metrik gerade die Euklidsche Norm, also gilt die Dreiecksungleichung.
  2.Fall: $x = \lambda y,\ z \neq \mu y\ \forall \mu$

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |x| + |z| = \lambda |y| + |z| \\ &\leq (|\lambda - 1| + |1|)|y| + |z| \\ &= |x - y| + |y| + |z| \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

  Der Fall $z = \lambda y,\ x \neq \mu y\ \forall \mu$ folgt analog.
  3.Fall: $x = \lambda z,\ y \neq \mu z\ \forall \mu$

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |x - z| = |1 - \lambda||x| \\ &\leq \lambda |x| + |x| \\ &\leq |z| + |x| + 2|y| \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

  4.Fall: x, y, z paarweise linear unabhägig

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |x| + |z| \\ &\leq |x| + |y| + |y| + |z| \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

Aufgabe G3 (Taylor-Entwicklung)

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x - y}{x + y}$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich der Glieder 2. Ordnung.

Lösung: Es gilt $f(x,y) = \frac{x+y-2y}{x+y} = 1 - 2\frac{y}{x+y}$ sowie $f(x,y) = \frac{2x-(x+y)}{x+y} = 2\frac{x}{x+y} - 1$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
D^{(1,0)}f(x,y) &= \partial_x f(x,y) = \frac{2y}{(x+y)^2} \\
D^{(0,1)}f(x,y) &= \partial_y f(x,y) = -\frac{2x}{(x+y)^2} \\
D^{(2,0)}f(x,y) &= \partial_x^2 f(x,y) = \frac{-4y}{(x+y)^3} \\
D^{(0,2)}f(x,y) &= \partial_y^2 f(x,y) = \frac{4x}{(x+y)^3} \\
D^{(1,1)}f(x,y) &= \partial_x\partial_y f(x,y) = \frac{2}{(x+y)^2} - \frac{4y}{(x+y)^3} = (2x-2y)/(x+y)^3.
\end{aligned}$$

Am Entwicklungspunkt $(1,1)$ erhalten wir somit:

$$f(1,1) = 0, \quad D^{(1,0)}f(1,1) = \frac{1}{2}, \quad D^{(0,1)}f(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$D^{(2,0)}f(1,1) = -\frac{1}{2}, \quad D^{(0,2)}f(1,1) = \frac{1}{2}, \quad D^{(1,1)}f(1,1) = 0.$$

Die Glieder der Taylorreihe bis zur 2. Ordnung sind:

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|\le 2} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(1,1)((x_1,x_2)-(1,1))^\alpha \\
= \; & f(1,1) + D^{(1,0)}f(1,1)(x_1-1) + D^{(0,1)}f(1,1)(x_2-1) \\
& + D^{(1,1)}f(1,1)(x_1-1)(x_2-1) + \frac{1}{2}D^{(2,0)}f(1,1)(x_1-1)^2 \\
& + \frac{1}{2}D^{(0,2)}f(1,1)(x_2-1)^2 \\
= \; & \frac{1}{2}(x_1-1) - \frac{1}{2}(x_2-1) - \frac{1}{4}(x_1-1)^2 + \frac{1}{4}(x_2-1)^2.
\end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Quader) (4 Punkte)

Welches Volumen kann ein Quader maximal haben, wenn seine Raumdiagonale die Länge 1 hat?

Lösung: Der Quader mit den Kantenlängen $a, b, c > 0$ hat das Volumen

$$V(a,b,c) = abc.$$

Da die Raumdiagonale die Länge 1 haben soll gilt

$$c = \sqrt{1-a^2-b^2}.$$

Daraus folgt

$$V(a,b) = ab\sqrt{1-a^2-b^2}$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial a}V(a,b) &= b\sqrt{1-a^2-b^2} - a^2 b\tfrac{1}{\sqrt{1-a^2-b^2}} = \tfrac{b(1-2a^2-b^2)}{\sqrt{1-a^2-b^2}} \\ \tfrac{\partial}{\partial b}V(a,b) &= a\sqrt{1-a^2-b^2} - ab^2\tfrac{1}{\sqrt{1-a^2-b^2}} = \tfrac{a(1-a^2-2b^2)}{\sqrt{1-a^2-b^2}} \end{aligned}.$$

Wir setzen den Gradienten gleich 0 und erhalten

$$b(1-2a^2-b^2) = 0 \text{ und } a(1-a^2-2b^2) = 0.$$

Da $a, b > 0$ muss

$$1-2a^2-b^2 = 0 = 1-a^2-2b^2 = 0$$

gelten. Lösungen des Gleichungssystems sind

$$a = b = \tfrac{1}{\sqrt{3}}.$$

Für die zweiten partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial^2}{\partial a^2}V(a,b) &= \tfrac{ab(-3+3a^2+2b^2)}{\sqrt{1-a^2-b^2}^3} \\ \tfrac{\partial^2}{\partial b^2}V(a,b) &= \tfrac{ab(-3+2a^2+3b^2)}{\sqrt{1-a^2-b^2}^3} \\ \tfrac{\partial^2}{\partial b \partial a}V(a,b) &= \tfrac{1-3a^2-3b^2+2a^4+2b^4+3a^a b^2}{\sqrt{1-a^2-b^2}^3} = \tfrac{\partial^2}{\partial a \partial b}V(a,b). \end{aligned}$$

Wir untersuchen nun die Hesse-Matrix von f in $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$

$$H_f(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = -\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Hesse-Matrix sind $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ und $-2\sqrt{3}$. Somit ist H_f negativ definit und ein Maximum liegt vor, wenn der Quader ein Würfel mit Kantenlänge $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ist.

Aufgabe H2 (Kritische Punkte) (4 Punkte)

Man klassifiziere die kritischen Punkte für

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy,$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ nach Maxima, Minima und Sattelpunkten.

Lösung: Sei $\alpha = 0$, dann gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -3y^2 \end{pmatrix},$$

der kritische Punkt ist folglich $(0,0)$. Es gilt

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

die Hesse-Matrix ist semidefinit, die Funktion nimmt sowhl negative also auch positive Werte in der Nähe von $(0,0)$ an.
Sei nun $\alpha \neq 0$, dann gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3\alpha y \\ -3y^2 + 3\alpha x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3\alpha \\ 3\alpha & -6y \end{pmatrix}$$

Die kritischen Punkte sind folglich $(0,0)$ und $(\alpha, -\alpha)$. Es gilt

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ 3\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

die Matrix ist indefinit, damit handelt es sich um einen Sattelpunkt. Am zweiten kritischen Punkt gilt

$$H_f(\alpha,-\alpha) = \begin{pmatrix} 6\alpha & 3\alpha \\ 3\alpha & 6\alpha \end{pmatrix},$$

die Definitheit von H_f hängt von α ab.
Für $\alpha < 0$ ist die Hesse-Matrix negativ-semidefinit, es handelt sich folglich um ein lokales Maximum. Für $\alpha > 0$ ist die Hesse-Matrix positiv-semidefinit, es handelt sich folglich um ein lokales Minimum.

Aufgabe H3 (Satz von Taylor) (2+2 Punkte)
Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion und $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R},$$

ein Polynom vom Grad $\leq k$.
Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-p(h)}{\|h\|^k} = 0$,

(2) p ist das k-te Taylorpolynom von f (mit Entwicklungspunkt 0).

Lösung: Es gilt nach dem Satz von Taylor

$$f(h) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(0)h^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f(\tau h))h^\alpha =: T_{k-1}(h) + R(h).$$

„(1) $\Rightarrow$ (2)" Sei $q(h) := p(h) - T_k(h)$. Es ist $q = 0$ zu zeigen.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach (1) ein $\delta > 0$, so dass $|\frac{f(h)-p(h)}{\|h\|^k}| < \varepsilon$, falls $\|h\| < \delta$. Da $D^\alpha f$ für $|\alpha| = k$ stetig ist, kann man δ so wählen, dass $|D^\alpha f(\tau h) - D^\alpha f(0)| < \varepsilon$ für $\|h\| < \delta$, da $\tau \leq 1$.

Man hat für $\|h\| < \delta$

$$\begin{aligned}
|q(h)| &= |p(h) - f(h) + T_{k-1}(h) + R(h) - T_k(h)| \\
&\leq |p(h) - f(h)| + \left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}\left((D^\alpha f(\tau h))h^\alpha - (D^\alpha f(0))h^\alpha\right) \right| \\
&\leq \varepsilon \|h\|^k + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \varepsilon \|h\|^{|\alpha|} \\
&= c\varepsilon \|h\|^k.
\end{aligned}$$

Also gilt $\frac{q(h)}{\|h\|^k} \to 0$. Wir schreiben $q(h) = \sum_{|\beta| \leq k} b_\beta h^\beta$. Dann gilt für festes h und $t \in \mathbb{R}$

$$q(th) = \sum_{|\beta| \leq k} b_\beta t^{|\beta|} h^\beta = \sum_{j=0}^{k} c(j,h) t^j$$

und

$$\frac{1}{|t|^i} q(th) \xrightarrow{t \to 0} 0 \quad \text{für} \quad i = 0, 1, ..., k.$$

Angenommen, wir hätten schon gezeigt $c(j,h) = 0$ für $j = 0, ..., l$, $l < k$. Dann gilt

$$0 \xleftarrow{t \to 0} \frac{1}{t^{l+1}} q(th) = \sum_{j=l+1}^{k} c(j,h) t^{j-l-1} \xrightarrow{t \to 0} c(l+1,h).$$

Also ist $c(l+1,h) = 0$. Per Induktion folgt also (Der Induktionsanfang geht analog zum Induktionsschritt) $q(th) = 0$ für alle t und weil h beliebig war, gilt $q = 0$ und wir haben (2) bewiesen.
„(2) $\Rightarrow$ (1)" Sei $p(h) = T_k(h)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|h\|^k} |f(h) - p(h)| &= \frac{1}{\|h\|^k} \left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f(\tau h) - D^\alpha f(0)) h^\alpha \right| \\
&\leq \frac{1}{\|h\|^k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} |D^\alpha f(\tau h) - D^\alpha f(0)| \|h\|^{|\alpha|} \\
&\leq \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} |D^\alpha f(\tau h) - D^\alpha f(0)| \\
&\xrightarrow{h \to 0} 0,
\end{aligned}$$

weil $D^\alpha f$ für $|\alpha| = k$ stetig ist.


KOMMT ALLE
ZUR VOLLVERSAMMLUNG DER
MATHESTUDIERENDEN
AM 09.06.09
UM 16:15
IN S103/123
HIER GIBT ES: INFOS ZUR HOCHSCHULWAHL,
WICHTIGES AUS DER FACHSCHAFT UND AKTUELLES
AUS DEM ASTA