Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
02.06.2009

7. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Der Affensattel)
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung f' von f.

(b) Bestimmen Sie die Hessematrix $H_f = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j}$ an der Stelle 0.

(c) Ist H_f positiv (semi-)definit, indefinit oder negativ (semi-)definit?

(d) Hat die Funktion f an der Stelle 0 ein Extremum?

Aufgabe G2 (Metriken)

a) Zeigen Sie, dass durch

$$d:\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert ist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ bezüglich dieser Metrik nicht vollständig ist.

b) **Französische Eisenbahnmetrik:**
Zeigen Sie, dass durch

$$d_{\mathrm{SNCF}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ d_{\mathrm{SNCF}}(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| & \text{falls } y = t \cdot x \text{ für ein } t \in \mathbb{R}, \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Metrik auf dem $\mathbb{R}^2$ definiert ist.

Aufgabe G3 (Taylor-Entwicklung)
Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich der Glieder 2. Ordnung.

Hausübung

Aufgabe H1 (Quader) (4 Punkte)
Welches Volumen kann ein Quader maximal haben, wenn seine Raumdiagonale die Länge 1 hat?

Aufgabe H2 (Kritische Punkte) (4 Punkte)
Man klassifiziere die kritischen Punkte für

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy,$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ nach Maxima, Minima und Sattelpunkten.

Aufgabe H3 (Satz von Taylor) (2+2 Punkte)
Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion und $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R},$$

ein Polynom vom Grad $\leq k$.
Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) $\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - p(h)}{\|h\|^k} = 0$,

(2) p ist das k-te Taylorpolynom von f (mit Entwicklungspunkt 0).