Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009
25.05.2009

6. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Laplace-Operator)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar. Der Laplace-Operator Δ ist definiert durch $\Delta f := \partial_1 \partial_1 f + \cdots + \partial_n \partial_n f$. Wir betrachten nun $U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und die Funktion $r : U \to \mathbb{R};\ x \mapsto ||x||_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\operatorname{grad} r(x) = \frac{x}{||x||_2}$.

b) Es gilt $\Delta(r^{2-n}) = 0$ für $n \geq 3$.

c) Im Falle $n = 2$ gilt $\Delta(\log r) = 0$.

Lösung:

a) Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} r(x) = \frac{1}{2\|x\|} 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|}.$$

Somit ist $\operatorname{grad} r(x) = \frac{x}{||x||_2}$.

b) Nach der Kettenregel gilt für $n \geq 3$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(r^{2-n})(x) = (2-n)\frac{1}{\|x\|^{n-1}}\frac{x_i}{\|x\|} = -(n-2)\frac{x_i}{\|x\|^n}.$$

Und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(r^{2-n})(x) &= -(n-2)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_i}{\|x\|^n} \\
&= -(n-2)\left(\frac{1}{\|x\|^n} - n\frac{1}{\|x\|^{n+1}}\frac{x_i}{\|x\|^1}x_i\right) \\
&= -(n-2)\left(\frac{1}{\|x\|^n} - n\frac{x_i^2}{\|x\|^{n+2}}\right).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\Delta(r^{2-n})(x) = -(n-2)\left(n\frac{1}{\|x\|^n} - n\frac{\|x\|^2}{\|x\|^{n+2}}\right) = 0.$$

c) Für $n = 2$ ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\log r(x) = \frac{1}{\|x\|}\frac{x_i}{\|x\|} = \frac{x_i}{\|x\|^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\log r(x) = \frac{1}{\|x\|^2} - 2\frac{x_i^2}{\|x\|^4}$$

und somit

$$\Delta \log r(x) = \frac{2}{\|x\|^2} - 2\frac{\|x\|^2}{\|x\|^4} = 0.$$

Aufgabe G2 (Partielle Ableitungen)

Berechnen Sie die gemischten Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

an der Stelle $(0,0)$.

Lösung: Da die Funktion auf den Koordinatenachsen verschwindet, gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. An den übrigen Punkten sind die partiellen Ableitungen durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

gegeben. Es folgt $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{-y^3}{+y^2} = -y$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$. Damit ergeben sich die gemischten Ableitungen zu $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$. Diese gemischten Ableitungen stimmen **nicht** überein.

Aufgabe G3 (Beschränktes Differential)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kugel und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion mit beschränktem Differential. Das heißt, es gebe eine Konstante $K \in \mathbb{R}^+$, so dass

$$||D_f(x)|| \leq K \text{ für alle } x \in U.$$

Man zeige, dass f in U gleichmäßig stetig ist.
$^{(*)}$Zeigen Sie, dass f eindeutig auf $\overline{U}$ fortsetzbar ist.

Lösung: Zu zeigen ist, dass für alle $\epsilon > 0$ eine $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in U$

$$\|\xi\| \leq \delta,\ (x+\xi) \in U \ \Rightarrow\ \|f(x+\xi) - f(x)\| < \epsilon.$$

U ist konvex und offen also existiert nach dem Mittelwertsatz ein $y \in U$ auf der Verbindung von x und $(x+\xi)$, so dass

$$f(x+\xi) - f(x) = f'(y)((x+\xi) - x).$$

Also ist

$$\|f(x+\xi) - f(x)\| = \|f'(y)\|\|((x+\xi) - x)\| \leq K\|\xi\| < K\delta.$$

Für $\delta = \frac{\epsilon}{K}$ folgt $\|f(x+\xi) - f(x)\| < \epsilon$, somit ist die gleichmäßige Stetigkeit bewiesen.
Fortsetzbarkeit:
Es sei $x \in \overline{U} \setminus U$ dann existiert eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U, die gegen x konvergiert. Wegen der glm. Stetigkeit auf U existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall\, u, v \in U \text{ mit } \|u - v\| \leq \delta \ \Rightarrow\ \|f(u) - f(v)\| < \epsilon.$$

Für fixes δ gibt es ein N, so dass für alle $n, k > N$

$$\|x_n - x_k\| < \delta$$

gilt. Daraus folgt

$$\|f(x_n) - f(x_k)\| < \epsilon,$$

das heißt, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Cauchy-Folge und konvergiert somit im $\mathbb{R}^m$. Daher ist die Definition

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

möglich. Überlegen wir uns nun, warum diese Definition eindeutig ist:
Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Cauchy-Folge, die gegen x konvergiert. Dann gibt es ein N_1 so dass für alle $n, k > N_1$

$$\|x_n - y_k\| \leq \|x_n - x\| + \|x - y_k\| < \delta$$

gilt. Damit folgt

$$\|f(x_n) - f(y_k)\| < \epsilon.$$

und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$.
Bleibt die glm. Stetigkeit auf $\overline{U}$ zu zeigen:
Wegen der glm. Stetigkeit auf U existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall\, u, v \in U \text{ mit } \|u - v\| \leq \delta \;\Rightarrow\; \|f(u) - f(v)\| < \tfrac{\epsilon}{3}.$$

Es sei $x, y \in \overline{U}$, mit $x_n \to_{n\to\infty} x$, $y_n \to_{n\to\infty} y$ und $\|x - y\| < \frac{\delta}{3}$. Dann existieren N_x, N_y, so dass

$$\forall\, n > N_x : \; \|x_n - x\| < \tfrac{\delta}{3} \quad \text{und} \quad \forall\, k > N_y : \; \|y_k - y\| < \tfrac{\delta}{3}.$$

Da $\|x_n - y_k\| < \delta$, gilt also

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f(x_n)\| + \|f(x_n) - f(y_k)\| + \|f(y) - f(y_k)\| < \epsilon.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Die Richtungsableitung der Exponentialfunktion) (2+2 Punkte)

Wir betrachten den Raum V der linearen Abbildungen vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$. Dabei identifizieren wir lineare Abbildungen A mit der zugehörigen Matrix bezüglich der kanonischen Basis. Die Matrixexponentialfunktion $\exp : V \to V$ ist durch

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Reihe für alle A konvergiert.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Matrixexponentialabbildung in Richtung A am Punkt $\mathbf{0}$ (d.h. bei der Nullabbildung).

Lösung:

a) Betrachten wir die Reihe A_k und verwenden die Zeilensummennorm:
Ist $\sum_{k=0}^{\infty} ||A_k|| < \infty$, so hat man eine konvergente Majorante für jede der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{ij}^{(k)}| < \infty$, da $|a_{ij}^k| \leq ||A_k||$. Damit ergibt sich die komponentenweise Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty$. Es reicht also $\sum_{k=0}^{\infty} ||A_k|| = \sum_{k=0}^{\infty} ||\frac{1}{k!} A^k|| < \infty$ zu zeigen.
Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ||A||^k < \infty$ konvergiert gegen $e^{||A||}$. Weil $||A^k|| \leq ||A||^k$ ist, konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} ||\frac{1}{k!} A^k|| < \infty$, also konvergiert nach obiger Überlegung $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k < \infty$.

b) Es gilt

$$\exp(A) - \exp(\mathbf{0}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k - A^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Somit folgt

$$\lim_{t \to 0} \frac{\exp(tA) - \exp(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k}{t} = \lim_{t \to 0} A + \frac{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k}{t} = A.$$

Man beachte, dass Summation und Limesbildung nicht beliebig vertauschbar sind.

Aufgabe H2 (Antipodensatz) (2+2 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^{n+1}$, die Sphäre

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\},$$

ist für alle $n \geq 1$ wegzusammenhängend und kompakt.

b) Sei $T : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann nimmt T ein Maximum und ein Minimum an und es gibt einen Punkt $x_0 \in \mathbb{S}^n$ mit $T(x_0) = T(-x_0)$.
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis die im Tutorium gezeigte Aussage, dass stetige Abbildungen wegzusammenhängende Mengen auf wegzusammenhängende Mengen abbilden, und den Zwischenwertsatz.

Lösung:

a) Es seine $x, y \in \mathbb{S}^n$, wir konstruieren einen Weg von x nach y in $\mathbb{S}^n$:
Wenn $(1-t)x + ty \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$ gilt. Wählen wir als Weg:

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^n, \quad \gamma(t) = \frac{(1-t)x+ty}{||(1-t)x+ty||}.$$

Sonst wählen wir einen dritten Punkt $z \in \mathbb{S}^n$, so dass $(1-t)x + tz \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$ und $(1-t)z + ty \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$. Nach obigem Verfahren erhalten wir einen Weg von x nach y über z.
Somit ist $\mathbb{S}^n$ wegzusammenhängend.
Für alle $x \in \mathbb{S}^n$ gilt $||x|| \leq c$ für $c > 1$, d.h. $\mathbb{S}^n$ ist beschränkt.
Sei $y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n$, d.h. $||y|| = c \neq 1$. Setzte $\epsilon = \frac{|1-c|}{2}$, dann ist

$$U_\epsilon(y) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n.$$

D.h. $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n$ ist offen und somit $\mathbb{S}^n$ ist abgeschlossen und kompakt.

b) Da $\mathbb{S}^n$ kompakt ist nimmt T auf $\mathbb{S}^n$ ein Minimum bzw. Maximum an, die dazugehörigen Argumente seien x_{min} bzw. x_{max}. Sei

$$G : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}, \; G(x) = T(x) - T(-x).$$

G ist auch stetig und entweder $G(x_{\text{min}}) < 0$ oder $T(x_{\text{min}}) = T(-x_{\text{min}})$. Ebenso gilt $G(x_{\text{max}}) > 0$ oder $T(x_{\text{max}}) = T(-x_{\text{max}})$. Es sei $G(x_{\text{min}}) < 0 < G(x_{\text{max}})$ (sonst ist die Aussage sowieso bewiesen). $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^n$ sei ein Weg von x_{min} nach x_{max}. Nach dem zitierten Satz ist $G(\gamma([0,1])) \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend. Es folgt

$$G(\gamma([0,1])) \supset [x_{\text{min}}, x_{\text{max}}] \ni 0$$

nach dem Zwischenwertsatz für die eindimensionale Funktion $G \circ \gamma$ folgt

$$\exists \, \xi \in [0,1] \quad G(\gamma(\xi)) = 0.$$

Das heißt, für $x = \gamma(\xi)$ gilt

$$G(x) = 0 \Leftrightarrow T(x) = T(-x).$$

Aufgabe H3 (homogene Funktionen) (2+2 Punkte)

Es sei $k \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad k, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und alle reellen $t > 0$ gilt:

$$f(tx) = t^k \, f(x).$$

Zeigen Sie, dass eine differenzierbare Funktion f genau dann homogen vom Grad k ist, wenn die Eulersche Identität

$$f'(x) \cdot x = k \, f(x)$$

gilt.

Lösung:

$\Rightarrow$ Es gelte $f(tx) = t^k \, f(x)$. Durch Differenzieren nach t erhält man $f'(tx)x = kt^{k-1} f(x)$ setzt man $t = 1$ so erhält man die Eulersche Identität.

$\Leftarrow$ Es gilt: $f'(tx) \cdot tx = k \, f(tx)$ Es sei $h(t) := t^{-k} f(tx)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} h(t) &= \frac{d}{dt} t^{-k} f(tx) \\
&= -kt^{-k-1} f(tx) + t^{-k} f'(tx)x \\
&= -kt^{-k-1} f(tx) + t^{-k-1} \, f'(tx)tx \\
&= -kt^{-k-1} f(tx) + t^{-k-1} k f(tx) = 0
\end{aligned}$$

Somit ist $h(t)$ konstant, es gilt $h(t) = h(1) = t^{-1} f(1x) = f(x)$. Damit ist $f(tx) = t^k \, f(x)$.

Am 02.06. findet die siebte Übung von 17.10-18.50 Uhr als Hörsaalübung mit allen Gruppen und allen Tutoren in S101/01 statt.