Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009
25.05.2009

6. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Laplace-Operator)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar. Der Laplace-Operator Δ ist definiert durch $\Delta f := \partial_1 \partial_1 f + \cdots + \partial_n \partial_n f$. Wir betrachten nun $U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und die Funktion $r : U \to \mathbb{R};\ x \mapsto ||x||_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\operatorname{grad} r(x) = \frac{x}{||x||_2}$.

b) Es gilt $\Delta(r^{2-n}) = 0$ für $n \geq 3$.

c) Im Falle $n = 2$ gilt $\Delta(\log r) = 0$.

Aufgabe G2 (Partielle Ableitungen)

Berechnen Sie die gemischten Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

an der Stelle $(0,0)$.

Aufgabe G3 (Beschränktes Differential)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kugel und $f: U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion mit beschränktem Differential. Das heißt, es gebe eine Konstante $K \in \mathbb{R}^+$, so dass

$$||D_f(x)|| \leq K \text{ für alle } x \in U.$$

Man zeige, dass f in U gleichmäßig stetig ist.

$^{(*)}$Zeigen Sie, dass f eindeutig auf $\overline{U}$ fortsetzbar ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Die Richtungsableitung der Exponentialfunktion) (2+2 Punkte)

Wir betrachten den Raum V der linearen Abbildungen vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$. Dabei identifizieren wir lineare Abbildungen A mit der zugehörigen Matrix bezüglich der kanonischen Basis. Die Matrixexponentialfunktion $\exp : V \to V$ ist durch

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Reihe für alle A konvergiert.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Matrixexponentialabbildung in Richtung A am Punkt $\mathbf{0}$ (d.h. bei der Nullabbildung).

Aufgabe H2 (Antipodensatz) (2+2 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^{n+1}$, die Sphäre

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\},$$

ist für alle $n \geq 1$ wegzusammenhängend und kompakt.

b) Sei $T : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann nimmt T ein Maximum und ein Minimum an und es gibt einen Punkt $x_0 \in \mathbb{S}^n$ mit $T(x_0) = T(-x_0)$.
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis die im Tutorium gezeigte Aussage, dass stetige Abbildungen wegzusammenhängende Mengen auf wegzusammenhängende Mengen abbilden, und den Zwischenwertsatz.

Aufgabe H3 (homogene Funktionen) (2+2 Punkte)

Es sei $k \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad k, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und alle reellen $t > 0$ gilt:

$$f(tx) = t^k f(x).$$

Zeigen Sie, dass eine differenzierbare Funktion f genau dann homogen vom Grad k ist, wenn die Eulersche Identität

$$f'(x) \cdot x = k\, f(x)$$

gilt.

Am 02.06. findet die siebte Übung von 17.10-18.50 Uhr als Hörsaalübung mit allen Gruppen und allen Tutoren in S101/01 statt.