Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009
18.05.2009

5. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Differenzierbarkeit)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := \sqrt{|xy|}$.
Zeigen Sie: f ist stetig und partiell differenzierbar im Punkt $(0, 0)$, aber die Funktion ist in $(0, 0)$ nicht total differenzierbar.

Lösung: Die Funktion $f(x, y) = \sqrt{|xy|} = \sqrt{|x|}\sqrt{|y|}$ ist als Produkt zweier stetiger Funktionen wieder stetig, also insbesondere im Punkt $(0, 0)$ stetig. Die partiellen Ableitungen im Punkt $(0, 0)$ können nur mit Hilfe der Definition berechnet werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.\end{aligned}$$

Beide partiellen Ableitungen sind im Punkt $(0, 0)$ gleich 0. Wäre f differenzierbar im Punkt $(0, 0)$, dann würde für die Jacobi-Matrix gelten: $f'(0, 0) = (0, 0)$, und es müßte für ein $\varphi(h, k)$ mit $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varphi(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$ die Gleichung

$$f(h, k) = f(0, 0) + f'(0, 0) \cdot (h, k) + \varphi(h, k)$$

erfüllt sein. Einsetzen ergibt

$$\sqrt{|xy|} = 0 + 0 + \varphi(h, k),$$

also $\varphi(h, k) = \sqrt{|hk|}$. Wählt man nun die Folge $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, dann gilt sicherlich $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = (0, 0)$, aber

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})}{\|(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Also kann f im Nullpunkt nicht differenzierbar sein.

Aufgabe G2 (Jacobi-Matrix)

Gegeben seien die Funktionen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z, xyz)$ bzw. $h(u, v) := (e^v, e^u)$. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen g', h' und $(h \circ g)'$.

Lösung:

$$g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 1 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}, \quad h'(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & e^v \\ e^u & 0 \end{pmatrix}$$

$$(h \circ g)(x,y,z) = (e^{xyz}, e^{x^2+y^2+z})$$

$$(h \circ g)'(x,y,z) = \begin{pmatrix} yze^{xyz} & xze^{xyz} & xye^{xyz} \\ 2xe^{x^2+y^2+z} & 2ye^{x^2+y^2+z} & e^{x^2+y^2+z} \end{pmatrix} = h' \cdot g'$$

Aufgabe G3 (Abbildungen von Matrizen) (1+3 Punkte)

Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge der $n \times n$-Matrizen.
Sei $|||\cdot|||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ die durch $|||\cdot|||$ induzierte Operatornorm, d.h.,

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{|||Ax|||}{|||x|||} : 0 \neq x \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

a) Zeigen Sie

$$|||Ax||| \leq \|A\| \, |||x|||.$$

b) Zeigen Sie

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \quad \text{für alle} \quad A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

c) Sei

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad (A,B) \mapsto A^2B.$$

Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt (A,B) differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(A,B)$.

Lösung: a)Aus der Definition folgt $\frac{|||Ax|||}{|||x|||} \leq \|A\|$.
b) es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$|||ABx||| \leq \|A\||||Bx||| \leq \|A\|\|B\||||x|||.$$

Somit gilt $\|AB\| = \sup\{|||ABx|||\ ,\ x \in \mathbb{R}^n,\ |||x||| = 1\} \leq \sup\{\|A\|\|B\|\ ,\ x \in \mathbb{R}^n,\ |||x||| = 1\} = \|A\|\|B\|$.
c) Sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^{n^2}$. Diese ist äquivalent zu der (von irgendeiner Norm) induzierten Operatornorm $\|\cdot\|_{Op}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(A+H, B+K) &= (A+H)^2(B+K) \\ &= A^2B + AHB + HAB + H^2B + A^2K + AHK + HAK + H^2K \\ &= f(A,B) + (AHB + HAB + A^2K) + H^2B + AHK + HAK + H^2K. \end{aligned}$$

Die Abbildung $(H,K) \mapsto AHB + HAB + A^2K$ ist offenbar linear. Außerdem

$$\begin{aligned} \frac{\|H^2B + AHK + HAK + H^2K\|}{\|H\| + \|K\|} &\leq c\frac{\|H^2B + AHK + HAK + H^2K\|_{Op}}{\|H\|_{Op} + \|K\|_{Op}} \\ &\leq c\frac{\|H\|_{Op}^2 B + 2\|A\|_{Op}\|H\|_{Op}\|K\|_{Op} + \|H\|_{Op}^2\|K\|_{Op}}{\|H\|_{Op} + \|K\||Op} \\ &\leq c\frac{\|H\|_{Op}^2\|B\|_{Op} + 2\|A\|_{Op}\|H\|_{Op}\|K\|_{Op} + \|H\|_{Op}^2\|K\|_{Op}}{\|H\|_{Op}} \\ &\leq c(\|H\|_{Op}\|B\|_{Op} + 2\|A\|_{Op}\|K\|_{Op} + \|H\|_{Op}\|K\|_{Op}) \\ &\xrightarrow{(H,K)\to 0} 0. \end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Differenzierbarkeit) (2+2 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } \ (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } \ (x,y) = 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie

a) $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existieren, sind aber im Nullpunkt nicht stetig.

b) f ist im Nullpunkt differenzierbar.

Lösung: Sei $(x,y) \neq (0,0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\right) \\ &= 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right). \end{aligned}$$

Sei $y = 0$. Dann hat man

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{h^2 \sin\frac{1}{|h|}}{h} = h\sin\frac{1}{|h|} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Somit ist existiert die partielle Ableitung nach x.
Sei $a_n = (\frac{1}{2n\pi}, 0)$. Dann gilt $a_n \to (0,0)$ aber

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_n) = 0 - \cos 2n\pi = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ unstetig. Für die Ableitung nach y geht alles genauso.
Wir zeigen nun, dass die totale Ableitung 0 ist. Es gilt für $h = (h_1, h_2) \neq (0,0)$

$$\frac{f(h)}{\|h\|} = \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left|(h_1^2+h_2^2)\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)\right| \leq \sqrt{h_1^2+h_2^2} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Also gilt

$$f(0+h) = 0 + 0h + f(h) = f(0,0) + df(0,0)h + f(h)$$

und f ist in $(0,0)$ differenzierbar.

Aufgabe H2 (Kompaktheit und gleichmäßige Stetigkeit) (4 Punkte)

Sei K eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen mit $f_n : K \to \mathbb{R}^m$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}^m$ konvergiert. Weiterhin sei $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf K gleichmäßig gegen $g \circ f$ konvergiert.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Menge

$$L := \{x \in \mathbb{R}^m : \ \exists\, y \in f(K) \text{ mit } \|x-y\| \leq 1\}$$

kompakt ist. Für $n \geq n_0$ gilt $f_n(K) \subseteq L$.

Lösung: Aus der gleichmäßigen Konvergenz der f_n folgt die Stetigkeit von f. Das Bild $f(K)$ ist als stetiges Bild eines Kompaktums kompakt. Also ist $f(K)$ beschränkt. Für $l \in L$ existiert ein $y \in f(K)$ mit $\|l - y\| \leq 1$, daher gilt

$$\|l\| \leq \|l - y\| + \|y\| < 1 + c,$$

somit ist L beschränkt.
Sei $x \in \mathbb{R}^m \setminus L$, dann gilt

$$\min_{y \in f(K)} \|x - y\| = d_x > 1, \text{ da } f(K) \text{ kompakt ist.}$$

Somit ist $U_{\frac{d_x - 1}{2}}(x)$ eine Umgebung von x, d.h. $\mathbb{R}^m \setminus L$ ist offen und somit L abgeschlossen und kompakt.
Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f gibt es einen Index $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \geq N_1$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_\infty \leq 1$$

gilt. Für $n \geq N_1$ gilt also $f_n(K) \in L$. Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir nun die gefragte gleichmäßige Konvergenz. Sei dazu $\epsilon > 0$ vorgegeben. Auf der kompakten Menge L ist die Funktion g gleichmäßig stetig. Daher gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\|g(x) - g(y)\| < \epsilon \text{ für alle } x, y \in L \text{ mit } \|x - y\| < \delta.$$

Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{x \in K} \|f_n(x) - f(x)\| < \delta \text{ falls } n \geq N_2.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\sup_{x \in K} \|g(fn(x)) - g(f(x))\| < \epsilon \text{ falls } n \geq \max\{N_1, N_2\}.$$

Damit ist die fragliche gleichmäßige Konvergenz gezeigt.

Aufgabe H3 (Kettenregel) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = -x^2 + 2xy - y^3.$$

Die Darstellung dieser Funktion in Polarkoordinaten

$$\tilde{x}(r, \varphi) = r \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad \tilde{y}(r, \varphi) = r \sin(\varphi)$$

lautet

$$\tilde{f}(r, \varphi) = f(\tilde{x}(r, \varphi), \tilde{y}(r, \varphi))$$

mit $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von $\tilde{f}$ mittels der Kettenregel.

Lösung: Die partiellen Ableitungen von f lauten

$$f_x(x, y) = -2x + 2y \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = 2x - 3y^2.$$

Für die Polarkoordinaten gilt

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_r(r, \varphi) = \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad \tilde{x}_\varphi(r, \varphi) = -r \sin(\varphi) \\ \text{bzw.} \quad &\tilde{y}_r(r, \varphi) = \sin(\varphi) \quad \text{und} \quad \tilde{y}_\varphi(r, \varphi) = r \cos(\varphi). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Funktion $\tilde{f}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_r(r,\varphi) &= f_x(\tilde{x}(r,\varphi),\tilde{y}(r,\varphi))\ \tilde{x}_r(r,\varphi) + f_y(\tilde{x}(r,\varphi),\tilde{y}(r,\varphi))\ \tilde{y}_r(r,\varphi) \\
&= (-2r\cos(\varphi) + 2r\sin(\varphi)) \cdot \cos(\varphi) + (2r\cos(\varphi) - 3r^2\sin^2(\varphi)) \cdot \sin(\varphi) \\
&= -2r\cos^2(\varphi) + 4r\sin(\varphi)\cos(\varphi) - 3r^2\sin^3(\varphi), \\
\tilde{f}_\varphi(r,\varphi) &= f_x(\tilde{x}(r,\varphi),\tilde{y}(r,\varphi))\ \tilde{x}_\varphi(r,\varphi) + f_y(\tilde{x}(r,\varphi),\tilde{y}(r,\varphi))\ \tilde{y}_\varphi(r,\varphi) \\
&= (-2r\cos(\varphi) + 2r\sin(\varphi)) \cdot (-r\sin(\varphi)) + (2r\cos(\varphi) - 3r^2\sin^2(\varphi)) \cdot (r\cos(\varphi)) \\
&= 2r^2(\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) - 3r^3\sin^2(\varphi)\cos(\varphi).
\end{aligned}
$$