Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
18.05.2009

5. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Differenzierbarkeit)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := \sqrt{|xy|}$.
Zeigen Sie: f ist stetig und partiell differenzierbar im Punkt $(0, 0)$, aber die Funktion ist in $(0, 0)$ nicht total differenzierbar.

Aufgabe G2 (Jacobi-Matrix)

Gegeben seien die Funktionen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z, xyz)$ bzw. $h(u, v) := (e^v, e^u)$. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen g', h' und $(h \circ g)'$.

Aufgabe G3 (Abbildungen von Matrizen) (1+3 Punkte)

Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge der $n \times n$-Matrizen.
Sei $|||\cdot|||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ die durch $|||\cdot|||$ induzierte Operatornorm, d.h.,

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{|||Ax|||}{|||x|||} \,:\, 0 \neq x \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

a) Zeigen Sie

$$|||Ax||| \leq \|A\|\,|||x|||.$$

b) Zeigen Sie

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \quad \text{für alle} \quad A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

c) Sei

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad (A, B) \mapsto A^2B.$$

Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt (A, B) differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(A, B)$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Differenzierbarkeit) (2+2 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } \ (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } \ (x,y) = 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie

a) $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existieren, sind aber im Nullpunkt nicht stetig.

b) f ist im Nullpunkt differenzierbar.

Aufgabe H2 (Kompaktheit und gleichmäßige Stetigkeit) (4 Punkte)

Sei K eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen mit $f_n : K \to \mathbb{R}^m$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \ K \to \mathbb{R}^m$ konvergiert. Weiterhin sei $g : \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf K gleichmäßig gegen $g \circ f$ konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Menge

$$L := \{x \in \mathbb{R}^m : \ \exists\, y \in f(K) \text{ mit } \|x-y\| \leq 1\}$$

kompakt ist. Für $n \geq n_0$ gilt $f_n(K) \subseteq L$.

Aufgabe H3 (Kettenregel) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = -x^2 + 2xy - y^3.$$

Die Darstellung dieser Funktion in Polarkoordinaten

$$\tilde{x}(r,\varphi) = r\cos(\varphi) \quad \text{und} \quad \tilde{y}(r,\varphi) = r\sin(\varphi)$$

lautet

$$\tilde{f}(r,\varphi) = f(\tilde{x}(r,\varphi), \tilde{y}(r,\varphi))$$

mit $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von $\tilde{f}$ mittels der Kettenregel.