Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009
11.05.2009

4. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Stetigkeit)
Wir betrachten die Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

und

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}.$$

a) Sind die Funktionen f_1, f_2 stetig?

b) Sind sie stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzbar, d.h., gibt es eine stetige Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F_{|\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} = f_i$?

Lösung:

a) Beide sind stetig, da aus stetigen Funktionen zusammengesetzt.

b) f_1 ist nicht stetig in 0 fortsetzbar. Zum Beweis betrachten wir zwei Folgen $\{(x_n, 0)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\{(x_n, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, die beide gegen $\{0\}$ konvergieren. Wegen $f_1(x_n, 0) = 1$ und $f_1(x_n, x_n) = 1/2$ schliessen wir, dass beide Grenzwerte existieren, aber verschieden sind. D.h. f_1 hat keinen Grenzwert in 0.

   f_2 ist stetig in 0 fortsetzbar. Denn für jede Folge $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$ gilt

$$|f_2(x_n, y_n)| \le |\tfrac{x_n^2 y_n}{x^2}| \le |y_n| \to 0.$$

Aufgabe G2 (Kompaktheit)

a) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Teilmengen. Zeigen Sie, dass $A \cup B$ ebenfalls kompakt ist.

b) Geben Sie ein Beispiel an, in dem die Vereinigung von unendlich vielen kompakten Mengen nicht kompakt ist.

c) Sei X eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Zu jeder Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X existiert ein $\lambda > 0$, so dass jede Teilmenge $A \subset X$ mit $\operatorname{diam}(A) < \lambda$ in einem der U_i liegt.

Lösung:

a) Da A und B kompakt sind, sind die Mengen abgeschlossen und beschränkt. Die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen, somit ist $A \cup B$ abgeschlossen.
Da A und B beschränkt sind, gibt es Konstanten a_1, a_2, b_1, b_2 mit $a_1 \leq \|x\| \leq a_2$ für $x \in A$ und $b_1 \leq \|y\| \leq b_2$ für $y \in B$. Damit gilt

$$\min\{a_1, b_1\} \leq \|x\| \leq \max\{a_2, b_2\} \text{ für } x \in A \cup B.$$

Damit ist $A \cup B$ beschränkt und abgeschlossen, und somit kompakt.

b) Es sei $A_k = \{k\}$, diese Mengen sind kompakt. Die Menge $\mathbb{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ ist jedoch nicht einmal beschränkt.

c) Für jedes $x \in X$ existiert ein i_x, so dass $x \in U_{i_x}$. Da U_{i_x} offen ist, existiert weiterhin ein r_x mit $U_{r_x}(x) \subseteq U_{i_x}$.
$\bigcup_{x \in X} U_{r_x/2}(x)$ ist eine Überdeckung von X, da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\bigcup_{i=1}^m U_{r_{x_i}/2}(x_i)$. Setze $\lambda = \min_{i=1,\dots,m}\{r_i/2\}$. Sei $A \subset X$ mit $\operatorname{diam}(A) < \lambda$ und $x, y \in A$, so gilt $\|x - y\| \leq \lambda$.
Es existiert ein $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $x \in U_{r_{x_i}/2}(x_i)$. Wir zeigen, dass $y \in U_{r_{x_i}}(x_i)$:

$$\|y - x_i\| \leq \|y - x\| + \|x - x_i\| < r_{x_i}/2 + r_{x_i}/2.$$

Also $A \subset U_{r_{x_i}}(x_i)$, dieses liegt aber nach Konstruktion in einem U_j, $j \in I$.

Aufgabe G3 (Matrizen $\mathbb{R}^{n \times n}$)

Die Menge $\mathbb{R}^{n \times n}$ der $(n \times n)$-Matrizen über $\mathbb{R}$ ist ein n^2-dimensionaler reeller Vektorraum. Man kann daher die euklidische Norm $\| \cdot \|_2$ auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ definieren.

a) Es sei $M = (m_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$Sind die Projektionen $p_{i,j} : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}, M \mapsto m_{i,j}$ stetig?

b) Beweisen Sie, dass die Determinante $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung ist.

c) Schließen Sie, dass $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) = 0\}$ eine abgeschlossene Menge ist.

Lösung:

a) Ja, es gilt nämlich für eine konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^{n^2}$ mit $x = lim_{n \to \infty} x_n$ auch $lim_{n \to \infty} x_{n,i} = x_i$.

b) Die Determinante ist als Polynom in den steigen Projektionen $p_{i,j}$ auch wieder stetig.

c) Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
Diese Menge ist als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter der stetigen Funktion det auch wieder abgeschlossen.

Hausübung

Aufgabe H1 (Funktionen auf dem Produkt kompakter Intervalle) (4 Punkte)

Seien I und J kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$ und $f : I \times J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ werde definiert durch

$$F(x) := \sup\{f(x, y) \mid y \in J\}\ .$$

Zeige, dass F stetig ist.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$ und $(a,b) \in I \times J$ beliebig. Da f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ so daß für alle $(x,y) \in I \times J$ mit $\|(x,y)-(a,b)\| < \delta$ gilt $|f(x,y)-f(a,b)| < \varepsilon$. Da f stetig und J kompakt ist gilt außerdem, daß für alle $x \in I$ ein $y_x \in J$ existiert mit $f(x,y_x) = \sup\{f(x,y) \mid y \in J\}$.
Dann folgt daß für alle $x \in I$ mit $|x-a| < \delta$ gilt

$$|F(x) - F(a)| = |\sup\{f(x,y) \mid y \in J\} - \sup\{f(a,y) \mid y \in J\}| = |f(x,y_x) - f(a,y_a)| < \varepsilon.$$

Denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man einen Widerspruch konstruieren: Angenommen, $|f(x,y_x) - f(a,y_a)| \geq \varepsilon$ für ein $x \in I$ mit $|x-a| < \delta$.
Fall I: Wenn $f(x,y_x) - f(a,y_a) \geq \varepsilon$ gilt, dann gilt $f(x,y_x) \geq f(a,y_a) + \varepsilon$. Da $\|(x,y_x)-(a,y_x)\| = |x-a|$, gilt wegen der Stetigkeit von f auch $|f(x,y_x) - f(a,y_x)| < \varepsilon$ und somit $f(a,y_x) > f(a,y_a)$, was ein Widerspruch zur Konstruktion von y_a ist.
Fall II: Wenn $-(f(x,y_x) - f(a,y_a)) \geq \varepsilon$ gilt, dann gilt $f(a,y_a) \geq f(x,y_x) + \varepsilon$. Da $\|(x,y_a) - (a,y_a)\| = |x-a|$, gilt wegen der Stetigkeit von f auch $|f(x,y_a) - f(a,y_a)| < \varepsilon$ und somit $f(x,y_a) > f(x,y_x)$, was ein Widerspruch zur Konstruktion von y_x ist.
Also ist F stetig für jedes $a \in I$.

Aufgabe H2 (Stetigkeit) (1+3 Punkte)

a) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{\sin(x)y^2}{x^2+y^4}.$$

Ist die Funktion f stetig? Ist sie stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzbar?

b) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass gilt

$$f \text{ ist stetig} \Leftrightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \text{ für beliebige Mengen } A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Lösung:

a) Die Funktion f ist als Quotient stetiger Funktionen wieder stetig.
Es gilt $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{2\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$. Somit kann die Funktion f nicht stetig auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

b) „$\Rightarrow$“: Es sei $x \in \overline{A}$, $A \subseteq X$ beliebig. Es existiert also eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Da f stetig ist, gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Da $f(x_n) \in f(A)$ gilt $f(x) \in \overline{f(A)}$ und somit $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, da $x \in \overline{A}$.

„$\Leftarrow$“: Angenommen f ist nicht stetig. Also existieren $\epsilon > 0$, x_n, x mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x)$. Wir wählen eine Teilfolge (x_n^*) so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $\|f(x_n^*) - f(x)\| \geq \epsilon > 0$ gilt. Daraus folgt, dass $f(x) \notin \overline{\{f(x_n^*) :\ n \in \mathbb{N}\}} = \overline{f\{x_n^* :\ n \in \mathbb{N})\}}$.
Setze $A = \{x_n^* :\ n \in \mathbb{N})\}$. Dann ist $\overline{A} = A \cup x$ und somit $f(\overline{A}) \not\subseteq \overline{f(A)}$. Somit war die Annahme falsch und f muss stetig sein.

Aufgabe H3 (Abstand von einer Menge) (2+2 Punkte)

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer und abgeschlossen. Weiterhin sei $K \in \mathbb{R}^n$ kompakt. Für einen Punkt $x \in K$ definieren wir seinen Abstand von der Menge A als

$$d(x,A) := \inf\{\|x-a\|_2 : a \in A\}.$$

a) Zeige, dass die Abbildung $K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x,A)$, stetig ist.

b) A und K seien disjunkt. Zeigen Sie, dass A und K einen echt positiven Abstand haben, d.h., es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\inf_{x\in K} d(x,A) \geq \varepsilon.$$

Lösung:

a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Für jedes $a \in A$ gilt dann, unter Benutzung der Dreiecksungleichung:

$$d(x, A) \leq \|x - a\| \leq \|y - a\| + \|x - y\| .$$

Bilden des Infimums liefert (man überlege sich genau warum die Ungleichung trotzdem bestehen bleibt)

$$d(x, A) \leq d(y, A) + \|x - y\| .$$

Analog ist auch $d(y, A) \leq d(x, A) + \|x - y\|$, somit zusammenfassend

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\| .$$

Gegeben $\varepsilon > 0$, gilt also $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \varepsilon$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\| \leq \delta := \varepsilon$.

b) Zu zeigen ist, dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass $d(y, A) \geq \delta$ für alle $y \in K$ gilt.

Nehmen wir an es gäbe eine $y \in K$ mit $d(y, A) = 0$, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ mit $\lim_{n \to \infty}(x_n, y) = 0$. Dies bedeutet, dass die Folge gegen x konvergiert. Da A abgeschlossen ist folgt daraus $x \in A$. Wegen $A \cap K = \emptyset$ gilt $d(y, A) > 0$ für alle $y \in K$.

Da d eine stetige Funktion vom Kompaktum K nach $\mathbb{R}$ ist, nimmt diese ein Minimum ein. Wir setzen $\delta := d(y_0, A) = \min_{y \in K} d(y, A)$ und sind damit fertig.