Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
11.05.2009

4. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Stetigkeit)

Wir betrachten die Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

und

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}.$$

a) Sind die Funktionen f_1, f_2 stetig?

b) Sind sie stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzbar, d.h., gibt es eine stetige Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F_{|\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} = f_i$?

Aufgabe G2 (Kompaktheit)

a) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Teilmengen. Zeigen Sie, dass $A \cup B$ ebenfalls kompakt ist.

b) Geben Sie ein Beispiel an, in dem die Vereinigung von unendlich vielen kompakten Mengen nicht kompakt ist.

c) Sei X eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Zu jeder Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X existiert ein $\lambda > 0$, so dass jede Teilmenge $A \subset X$ mit $\operatorname{diam}(A) < \lambda$ in einem der U_i liegt.

Aufgabe G3 (Matrizen $\mathbb{R}^{n\times n}$)

Die Menge $\mathbb{R}^{n\times n}$ der $(n \times n)$-Matrizen über $\mathbb{R}$ ist ein n^2-dimensionaler reeller Vektorraum. Man kann daher die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ definieren.

a) Es sei $M = (m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$Sind die Projektionen $p_{i,j} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, M \mapsto m_{i,j}$ stetig?

b) Beweisen Sie, dass die Determinante $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung ist.

c) Schließen Sie, dass $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) = 0\}$ eine abgeschlossene Menge ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Funktionen auf dem Produkt kompakter Intervalle) (4 Punkte)

Seien I und J kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$ und $f : I \times J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ werde definiert durch

$$F(x) := \sup\{f(x,y) \mid y \in J\} .$$

Zeige, dass F stetig ist.

Aufgabe H2 (Stetigkeit) (1+3 Punkte)

a) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{\sin(x) y^2}{x^2 + y^4}.$$

Ist die Funktion f stetig? Ist sie stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzbar?

b) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass gilt

$$f \text{ ist stetig} \Leftrightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \text{ für beliebige Mengen } A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe H3 (Abstand von einer Menge) (2+2 Punkte)

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer und abgeschlossen. Weiterhin sei $K \in \mathbb{R}^n$ kompakt. Für einen Punkt $x \in K$ definieren wir seinen Abstand von der Menge A als

$$d(x,A) := \inf\{\|x-a\|_2 : a \in A\} .$$

a) Zeige, dass die Abbildung $K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x,A)$, stetig ist.

b) A und K seien disjunkt. Zeigen Sie, dass A und K einen echt positiven Abstand haben, d.h., es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\inf_{x \in K} d(x,A) \geq \varepsilon.$$