Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
04.05.2009

3. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Äquivalenz von Normen)

i) Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit der 1-Norm $\|\cdot\|_1$, der Euklidschen Norm $\|\cdot\|_2$ und der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty,$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

gilt und dass die vier auftretenden Konstanten optimal sind.

ii) Beschreiben Sie die offenen Einheitskugeln $U_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; \|x\|_p < 1\}$ des $\mathbb{R}^3$ für $p \in \{1, 2, \infty\}$.

Lösung:

i)

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} |x_k| \leq \sum_{k=1,\dots,n} |x_k| = \|x\|_1 \leq n \max_{k=1,\dots,n} |x_k| = n\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} |x_k| = \sqrt{(\max_{k=1,\dots,n} |x_k|)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1,\dots,n} |x_k|^2} = \|x\|_1 \leq \sqrt{n(\max_{k=1,\dots,n} |x_k|)^2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

Für $x = (1, 0, \dots, 0)$ gilt

$$\|x\|_\infty = 1 = \|x\|_1 = \|x\|_2.$$

Für $x = (1, 1, \dots, 1)$ gilt

$$\|x\|_\infty = 1, \; \|x\|_1 = n, \; \|x\|_2 = \sqrt{n}.$$

Somit sind die Konstanten optimal.

ii) Für $p = 1$ ist der Einheitsball das Innere eines Oktaeders mit den Ecken: $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(1, 0, 0)$ und $(-1, 0, 0)$.
Für $p = 2$ ist der Einheitsball das Innere einer Kugel mit Radius 1 um den Ursprung.
Der Einheitsball in Maximumsnorm ist das Innere eines n-dimensionaler Würfel mit Kantenlänge 2 und den Ecken $(1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$ und $(-1, -1, -1)$.

Aufgabe G2 (Topologische Begriffe)

Das *Innere* $\mathring{A}$ einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge aller inneren Punkte von A.
Der *Abschluss* $\overline{A}$ von A (auch *abgeschlossene Hülle*) ist die Menge aller Grenzwerte von konvergenten Folgen, deren Glieder in A liegen. Das heißt

$$\overline{A} := \{x \in \mathbb{R}^n : \ x = \lim_{k \to \infty} a_k, \quad a_k \in A\}.$$

i) Zeige, dass
$$\mathring{A} = \bigcup_{O \subset A,\, O \text{ offen}} O$$
gilt.

ii) Zeige, dass
$$\overline{A} = \bigcap_{B \supset A,\, B \text{ abgeschlossen}} B$$
gilt.

Lösung:

i) Ist $x \in A$ ein innerer Punkt, so existiert eine Umgebung $U \subset A$ von x, daraus folgt, dass x in $\bigcup_{O \subset A,\, O \text{ offen}} O$ liegt. Liegt x in $\bigcup_{O \subset A,\, O \text{ offen}} O$, so existiert ein $0 \subset A$ welches offen ist und x enthält, d.h. x ist ein innerer Punkt.

ii) Für $x \in \overline{A}$ gibt es eine Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die gegen x konvergiert. Angenommen für $x \in \overline{A}$ existiere eine abgeschlossene Menge $B \supset A$, welche x nicht enthalte. Alle a_k liegen in A und damit in B, d.h. x ist ein Häufungspunkt von B. Wir haben $x \notin B$ angenommen, somit ist B nicht abgeschlossen. Dies ist ein Widerspruch, somit gilt
$$\overline{A} \subset \bigcap_{B \supset A,\, B \text{ abgeschlossen}} B.$$
Sei nun
$$x \in \bigcap_{B \supset A,\, B \text{ abgeschlossen}} B$$
wir unterscheiden zwei Fälle. Wenn x in A liegt, so ist $x \in \overline{A}$. Sei $x \notin A$, angenommen es existiere eine Umgebung U von x, die kein Element von A enthalte – damit ist auch ausgeschlossen, dass eine Folge in A gegen x konvergiert. Dann ist $B = \mathbb{R}^n \setminus U \supset A$ abgeschlossen und $x \notin B$, dies ist ein Widerspruch. Also enthalten alle Umgebungen von x Punkte aus A, somit ist $x \in \overline{A}$.

Aufgabe G3 (Ein Beispiel)

Es sei
$$A = [0,1] \times [0,1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \{\tfrac{1}{n}\} \times [0, 1 - \tfrac{1}{n}].$$

i) Skizzieren Sie A.

ii) Geben sie alle Häufungspunkte von A an.

iii) Geben Sie den Rand ∂A, das Innere $\mathring{A}$ und die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ von A an.

iv) Ist A offen? Ist A abgeschlossen?

Lösung:

ii) Alle Punkte im Rechteck $R = [0,1] \times [0,1]$ sind Häufungspunkte von A.
Betrachte eine Umgebung $U_\varepsilon(x)$, $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ wir unterscheiden 2 Fälle. Falls $x \in R$ und $x_1 \notin \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ dann ist $y = x + (0, \frac{\varepsilon}{2})$ (oder $y = x - (0, \frac{\varepsilon}{2})$) in A enthalten. Andernfalls gilt $x_1 = \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann liegt

$$y = x + (\frac{\min\{\varepsilon, \frac{1}{n^2}\}}{2}, 0)$$

r in A.

iii) Wir zeigen, dass

$$\partial A = M = [0,1] \times \{0,1\} \cup \{0,1\} \times [0,1] \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \{\tfrac{1}{n}\} \times [0, 1 - \tfrac{1}{n}]$$

gilt:
Dass jede Umgebung von $x \in C$ einen Punkt in A enthält folgt aus ii), da $C \subset R$.
Betrachten wir erneut ein Umgebung $U_\varepsilon(x)$, $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Falls $x_1 = \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist $y = x + (0, \frac{\varepsilon}{2})$ (oder $y = x - (0, \frac{\varepsilon}{2})$) in $\mathbb{R}^2 \setminus A$ enthalten. Gilt $x_1 \in \{0, 1\}$ so ist $y = x + (\frac{\varepsilon}{2}, 0)$ (oder $y = x - (\frac{\varepsilon}{2}, 0)$) in $\mathbb{R}^2 \setminus A$ enthalten. Für $x_2 \in \{0,1\}$ ist analog $y = x + (0, \frac{\varepsilon}{2})$ (oder $y = x - (0, \frac{\varepsilon}{2})$) in $\mathbb{R}^2 \setminus A$ enthalten. Somit enthält jede Umgebung von x einen Punkt aus dem Komplement von A. Damit ist x Randpunkt.

Weiterhin gilt

$$\mathring{A} = D = R \setminus \partial A = (0,1) \times (0,1) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \{\tfrac{1}{n}\} \times (0, 1 - \tfrac{1}{n}].$$

Für einen beliebigen Punkt x aus D mit $x_1 \in (\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0})$, setzte

$$\epsilon = \min\{|x_1 - \tfrac{1}{n_0+1}|, |x_1 - \tfrac{1}{n_0}|, x_2, |1 - x_2|\} \text{ es folgt } U_\epsilon(x) \subset D.$$

Damit ist x ein innerer Punkt.
Falls $x_1 = \frac{1}{n_0}$, so setze

$$\epsilon = \min\{|x_1|, |1 - x_1|, |1 - x_2|, |x_2 - (1 - \tfrac{1}{n_0})|\} \text{ es folgt } U_\epsilon(x) \subset D.$$

Damit gilt $D = \mathring{A}$.

$\overline{A} \supset R$ folgt aus der Tatsache, dass alle Häufungspunkte und alle inneren Punkte in $\overline{A}$ liegen. Da $\mathbb{R}^2 \setminus R$ offen ist, findet sich für jeden Punkt x aus dem Komplement von R eine Umgebung, die einen leeren Schnitt mit A hat. Somit kann keine Folge in A gegen x konvergieren.

iv) A ist nicht offen, da zum Beispiel der Punkt $(1,1)$ kein innerer Punkt ist, aber in A liegt.
A ist nicht abgeschlossen, da $\mathbb{R}^2 \setminus A$ nicht offen ist. Der Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ zum Beispiel ist kein innerer Punkt von $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

Hausübung

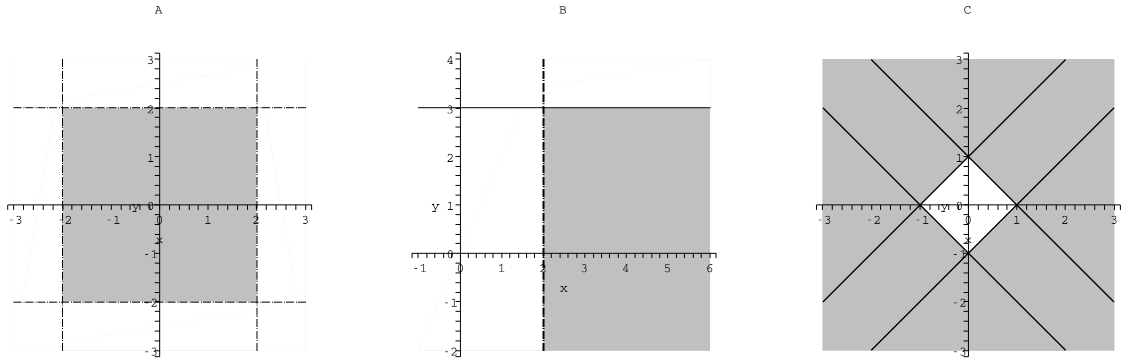
Aufgabe H1 (Offen, abgeschlossen, kompakt) (1+2+1 Punkte)

Skizzieren Sie die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) < 2\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2,\ y \leq 3\} \text{ und} \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1\}, \end{aligned}$$

und geben Sie jeweils (mit Begründung) an, ob diese offen, abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt sind. Bestimmen Sie außerdem jeweils die abgeschlossene Hülle der Menge.

Lösung:



zu A:

- offen, denn für jedes $(x, y) \in A$ ist $|x| < 2$ und $|y| < 2$, also gibt es ein $\epsilon_x > 0$ mit $|x| + \epsilon_x < 2$ und ein $\epsilon_y > 0$ mit $|y| + \epsilon_y < 2$. Für $\epsilon = \min\{\epsilon_x, \epsilon_y\}$ liegt die ϵ-Umgebung um (x, y) also in A. Also ist jeder Punkt von A innerer Punkt, d.h. A ist offen.
- nicht abgeschlossen, denn $(2, 0)$ ist ein Häufungspunkt von A (jede ϵ-Umgebung von $(2, 0)$ enthält den Punkt $(2 - \frac{\epsilon}{2}, 0) \in A$) aber $(2, 0) \notin A$.
- beschränkt, da für alle $(x, y) \in A$ gilt

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}.$$

- nicht kompakt, da nicht abgeschlossen.
- $\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) \leq 2\}$.

zu B:

- nicht offen, denn $(3, 3) \in B$, aber $(3, 3)$ ist kein innerer Punkt von B, denn in jeder ϵ-Umgebung von $(3, 3)$ liegt der Punkt $(3, 3 + \frac{\epsilon}{2})$, der nicht zu B gehört.
- nicht abgeschlossen, denn $(2, 0)$ ist Häufungspunkt (Begründung wie oben), aber $(2, 0) \notin B$.
- nicht beschränkt, denn $(3, n) \in B\ \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \|(3, n)\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{9 + n^2} = \infty.$$

- nicht kompakt, da nicht abgeschlossen.
- $\overline{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2, y \leq 3\}$.

zu C:

- nicht offen, denn $(-1, 0) \in C$, aber ist kein innerer Punkt.
- abgeschlossen, denn $\partial C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\} \subseteq C$.
- nicht beschränkt, denn $(n, 0) \in C\ \forall n \in \mathbb{N}$.
- nicht kompakt, da nicht beschränkt.
- $\overline{C} = C$.

Aufgabe H2 (Äquivalenz von Normen) (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ auf einem Vektorraum V genau dann äquivalent sind, wenn sie die gleichen offenen Mengen liefern.

Lösung:
Seien die offenen Mengen, die $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ erzeugen, gleich. Sei $B_{1,\|\cdot\|}$ die Einheitskugel bezüglich $\|\cdot\|$ und $B_{1,|||\cdot|||}$ die Einheitskugel bezüglich $|||\cdot|||$. Da $B_{1,\|\cdot\|}$ offen bezüglich $\|\cdot\|$ ist, ist sie auch offen bezüglich $|||\cdot|||$. Da $0 \in B_{1,\|\cdot\|}$ gibt es ein $\rho > 0$, so dass

$$\rho B_{1,|||\cdot|||} = \{y \in V \mid |||y||| < \rho\} \subset B_{1,\|\cdot\|}.$$

Sei nun $x \in V$ beliebig. Dann gilt

$$\rho \frac{x}{2|||x|||} \in \rho B_{1,|||\cdot|||} \subset B_{1,\|\cdot\|}.$$

Also

$$\left\| \rho \frac{x}{2|||x|||} \right\| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq \frac{2}{\rho}|||x|||.$$

Analog (indem man die Rollen von $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ vertauscht) zeigt man, dass es ein $c > 0$ gibt mit $|||x||| \leq c\|x\|$.
Also sind die beiden Normen äquivalent.
Seien nun die beiden Normen äquivalent und U eine offene Menge bezüglich $\|\cdot\|$. Wegen der Äquivalenz können wir $|||x||| \geq c\|x\|$ für alle $x \in V$ annehmen.
Sei $x \in U$. Dann existiert eine Kugel mit Radius ε und Mittelpunkt x, $B_{\varepsilon,\|\cdot\|}(x) \subset U$. Dann gilt

$$B_{\frac{\varepsilon}{c},|||\cdot|||}(x) \subset B_{\varepsilon,\|\cdot\|}(x) \subset U,$$

denn für $y \in B_{\frac{\varepsilon}{c},|||\cdot|||}(x)$ gilt $\|x-y\| \leq c|||x-y||| \leq c\frac{\varepsilon}{c}$. Also ist U auch offen bezüglich $|||\cdot|||$. Das offene Mengen bezüglich $|||\cdot|||$ auch offen bezüglich $\|\cdot\|$ sind, zeigt man analog.

Aufgabe H3 (Topologie) (3+1 Punkte)

i) Zeigen Sie, dass für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

a) $\overline{A} = A \cup \partial A$, *b)* $\mathring{A} = A \setminus \partial A$, *c)* $\mathring{A} \cap \partial A = \emptyset$, *d)* $\mathring{A} \cup \partial A = \overline{A}$.

ii) Finden Sie ein Beispiel dafür, dass im Allgemeinen $\mathring{\overline{A}} = A$ nicht gilt.

Lösung:

i) a) Ist $x \in A$ so konvergiert die konstante Folge, mit $a_k = x$ für alle k, gegen x somit ist $x \in \overline{A}$. Ist x ein Randpunkt, so gibt es ein jeder Umgebung von x einen Punkt aus A. Wir wählen für $k \in \mathbb{N}$ einen der Punkte aus $U_{\frac{1}{k}}(x) \cup A$ als a_k aus, die so definierte Folge konvergiert gegen x, d.h. $x \in \overline{A}$. Somit $\overline{A} \supset A \cup \partial A$.
Sei $x \in \overline{A} \setminus A$, d.h. $x \notin A$. Eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A konvergiert gegen x, d.h. x ist ein Häufungspunkt von A. Jede Umgebung von x enthält auch einen Punkt aus dem Komplement von A – nämlich x, d.h. x ist ein Randpunkt und $\overline{A} \subset A \cup \partial A$.

b) Folgt direkt aus den Definitionen. Ist $x \in \mathring{A}$, dann gibt es eine Umgebung um x die in A liegt, d.h. $x \in A$ aber $x \notin \partial A$. Ist umgekehrt $x \in A \setminus \partial A$, dann gibt es eine Umgebung um x welche in A liegt und x damit ein innerer Punkt von A.

c)
$$\mathring{A} \cap \partial A =^{b} A \setminus \partial A \cap \partial A = \emptyset$$

d)
$$\mathring{A} \cup \partial A =^{b)} A \setminus \partial A \cup \partial A = A \cup \partial A =^{a)}= \overline{A}$$

ii) Ein Beispiel ist $U =]0,1[\cup]1,2[$. Dann gilt $\bar{A} = [0,2]$ und $\mathring{\bar{A}} =]0,2[\neq A$.