Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
04.05.2009

3. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Äquivalenz von Normen)

i) Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit der 1-Norm $\|\cdot\|_1$, der Euklidschen Norm $\|\cdot\|_2$ und der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty,$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

gilt und dass die vier auftretenden Konstanten optimal sind.

ii) Beschreiben Sie die offenen Einheitskugeln $U_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ \|x\|_p < 1\}$ des $\mathbb{R}^3$ für $p \in \{1, 2, \infty\}$.

Aufgabe G2 (Topologische Begriffe)

Das *Innere* $\mathring{A}$ einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge aller inneren Punkte von A.
Der *Abschluss* $\overline{A}$ von A (auch *abgeschlossene Hülle*) ist die Menge aller Grenzwerte von konvergenten Folgen, deren Glieder in A liegen. Das heißt

$$\overline{A} := \{x \in \mathbb{R}^n : \ x = \lim_{k\to\infty} a_k, \quad a_k \in A\}.$$

i) Zeige, dass

$$\mathring{A} = \bigcup_{O \subset A,\, O \text{ offen}} O$$

gilt.

ii) Zeige, dass

$$\overline{A} = \bigcap_{B \supset A,\, B \text{ abgeschlossen}} B$$

gilt.

Aufgabe G3 (Ein Beispiel)

Es sei

$$A = [0,1] \times [0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \{\tfrac{1}{n}\} \times [0, 1 - \tfrac{1}{n}].$$

i) Skizzieren Sie A.
ii) Geben sie alle Häufungspunkte von A an.
iii) Geben Sie den Rand ∂A, das Innere $\mathring{A}$ und die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ von A an.
iv) Ist A offen? Ist A abgeschlossen?

Hausübung

Aufgabe H1 (Offen, abgeschlossen, kompakt) (1+2+1 Punkte)
Skizzieren Sie die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|,|y|) < 2\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2,\ y \leq 3\} \text{ und} \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1\}, \end{aligned}$$

und geben Sie jeweils (mit Begründung) an, ob diese offen, abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt sind. Bestimmen Sie außerdem jeweils die abgeschlossene Hülle der Menge.

Aufgabe H2 (Äquivalenz von Normen) (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ auf einem Vektorraum V genau dann äquivalent sind, wenn sie die gleichen offenen Mengen liefern.

Aufgabe H3 (Topologie) (3+1 Punkte)

i) Zeigen Sie, dass für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$a)\ \overline{A} = A \cup \partial A, \qquad b)\ \mathring{A} = A \setminus \partial A, \qquad c)\ \mathring{A} \cap \partial A = \emptyset, \qquad d)\ \mathring{A} \cup \partial A = \overline{A}.$$

ii) Finden Sie ein Beispiel dafür, dass im Allgemeinen $\mathring{\overline{A}} = A$ nicht gilt.