Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
27.04.2009

2. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Ungerade und gerade Funktionen)

Man beweise:

i) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische gerade Funktion, so hat die Fourier-Reihe von f die Gestalt

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx.$$

ii) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische ungerade Funktion, so hat die Fourier-Reihe von f die Gestalt

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

iii) Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich als Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellen.

Lösung:

i) Sei f gerade, also $f(x) = f(-x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} b_k &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\,\sin(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,\sin(x)\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{0} f(|x|)\,(-\sin(|x|))\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,\sin(x)\,dx = 0. \end{aligned}$$

Somit bleiben bei geraden Funktionen nur eine Kosinus-Reihe.

ii) Sei f gerade, also $f(x) = -f(-x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\,\cos(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,\cos(x)\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{0} (-f(|x|))\,\cos(|x|)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,\cos(x)\,dx = 0. \end{aligned}$$

Somit bleiben bei ungeraden Funktionen nur eine Sinus-Reihe.

iii) Es gilt

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Setze $u(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ und $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$. Wir zeigen, dass u ungerade und g gerade ist.

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2} = -\frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = -u(-x) \\ g(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(-x). \end{aligned}$$

Aufgabe G2 (Treppenfunktion)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die $2\pi-$periodische Funktion, die durch

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \\ \frac{1}{2} & x \in [-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist.

i) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

ii) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe $F(x)$ der Funktion f.

iii) Gegen welche Funktion konvergiert $F(x)$ punktweise?

Lösung: (ii) $x \in [0, 2\pi]$

ii) Da f ungerade ist folgt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} b_n &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \tfrac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \tfrac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} -\tfrac{1}{2} \sin(nx) dx \\ &= \tfrac{1}{n\pi} \cos(nx) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \\ &= \tfrac{1}{n\pi} (\cos(\tfrac{3n\pi}{4}) - \cos(\tfrac{n\pi}{4})) \end{aligned}$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n\pi} (\cos(\tfrac{3n\pi}{4}) - \cos(\tfrac{n\pi}{4})) \sin(nx)$$

iii) Nach Satz 11.3 aus dem Skript konvergiert $F(x)$ punktweise gegen die 2π-periodische Funktion $\tilde{f}$, die auf $[-\pi, \pi]$ durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi) \\ \frac{1}{2} & x \in (-\frac{3\pi}{4}, -\frac{1}{4}\pi) \\ -\frac{1}{4} & x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\} \\ \frac{1}{4} & x \in \{-\frac{\pi}{4}, -\frac{3}{4}\pi\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe G3 (Dirichlet-Kern)

Zeigen Sie, dass für den Dirichlet-Kern D_n gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx \geq \frac{4}{\pi^2} \ln n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Schätzen Sie $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx$ durch das Integral $\int_0^{n\pi} \frac{|\sin u|}{u}\, du$ nach unten ab und spalten Sie dieses in n Integrationsbereiche der Länge π auf.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})x)|}{|\sin(\frac{1}{2}x)|}\, dx = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})x)|}{|\sin(\frac{1}{2}x)|}\, dx \\
&= \tfrac{1}{\pi(n+\frac{1}{2})} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin(u)|}{|\sin(\frac{1}{2(n+\frac{1}{2})}u)|}\, du \geq \tfrac{1}{\pi(n+\frac{1}{2})} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin(u)| 2(n+\frac{1}{2})}{u}\, du \\
&\geq \tfrac{2}{\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\, du \geq \tfrac{2}{\pi} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\, du \\
&= \tfrac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\, du \\
&\geq \tfrac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)|\, du = \tfrac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)} \int_0^{\pi} \sin(u)\, du \\
&= \tfrac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)} \underbrace{((-\cos(\pi) + \cos(0))}_{2} = \tfrac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Nach dem Beweis des Vergleichkriteriums gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \tfrac{1}{x} dx = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) \geq \ln(n).$$

Hausübung

Aufgabe G4 (Reelle Fourier-Reihe)

Die Funktion f sei 2π–periodisch mit

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

i) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f.

ii) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourier-Reihe punktweise? Ist die Konvergenz auf $[-\pi,\ \pi]$ gleichmäßig?

iii) Zeigen Sie mittels gliedweiser Integration:

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \pi^3/6 - 4(1 - 1/3^3 + 1/5^3 - ...).$$

Lösung:

i) Die Funktion f ist auf $(-\pi, \pi)$ gerade,$f(x) = f(-x)$, also gilt $b_j = 0$ für $j \in N$.
$a_0 = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = (2/3)\pi^2$.
Für $j > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
a_j &= (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(jx)\,dx \\
&= (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(jx)\,dx \\
&= \left[\tfrac{1}{j}x^2\sin(jx)\right]_{-\pi}^{\pi} - 2/(j\pi)\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(jx)\,dx \\
&= -2/(j\pi)\left[x(-1/j)\cos(jx)|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}(1/j)\cos(jx)\,dx\right] \\
&= -2/(j\pi)\left[\pi(-1/j)(-1)^j + \pi(-1/j)(-1)^j\right] + 0 \\
&= (2/j)\left[(1/j)(-1)^j + (1/j)(-1)^j\right] \\
&= (-1)^j 4/j^2
\end{aligned}$$

$$F(x) = \pi^2/3 + 4\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j/j^2\ \cos(jx)$$

ii) Nach Satz 11.3 konvergiert die Fourier-Reihe punktweise gegen f. Sie konvergiert auch gleichmäßig, da sie fast überall f stetig differenzierbar ist, da dies nicht im Skript steht, ist es angeraten das Majorantenkriterium zu verwenden mit der Reihe $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

iii)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx &= \int_0^{\pi/2} F(x)\,dx \\
&= (1/3)\int_0^{\pi/2} \pi^2\,dx + 4\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j/j^2 \int_0^{\pi/2}\cos(jx)\,dx \\
&= \pi^3/6 + 4\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j/j^2 \sin(jx)/j|_0^{\pi/2} \\
&= \pi^3/6 + 4\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{2j-1}/(2j-1)^3\,(-1)^{j+1} \\
&= \pi^3/6 + 4\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j/(2j-1)^3
\end{aligned}
$$

Aufgabe G5 (Einfluss der Differenzierbarkeit von f)

i) Sei f eine k-mal stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion und

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

die zugehörige Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise. Zeigen Sie, dass $c_n = o(|n|^{-k})$ gilt, das heißt, dass $c_n|n|^k \to 0$ für $|n| \to \infty$ gilt.

ii) Sei f stetig und

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

die zugehörige Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise, wobei $c_0 = 0$ gelten soll. Sei

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Zeigen Sie, dass g 2π-periodisch ist, und berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $\hat{g}_n$ von g.

Lösung:

i) Es seien d_n die Koeffizienten den Fourier-Reihe von f', dann gilt

$$
\begin{aligned}
d_n &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}dx \\
&= \tfrac{1}{2\pi} f(x)e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \tfrac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)dx \\
&\qquad \text{(partielle Integration: } u = e^{-inx},\ v' = f'(x)) \\
&= in \cdot c_n \qquad (f(\pi) = f(-\pi),\ e^{-in\pi} = e^{in\pi}).
\end{aligned}
$$

Folglich sind die Koeffizienten e_n der Fourier-Reihe der k-ten Ableitung von f.

$$e_n = (in)^k \cdot c_n.$$

Umgekehrt gilt $c_n = \frac{1}{(in)^k} e_n$. Da $f^{(k)}$ auf $[-\pi, \pi]$ integrierbar ist gilt nach dem Lemma von Riemann-Lebesgues $e_n \to 0$ für $|n| \to \infty$ und somit $c_n\,|n|^k \to 0$.

ii) Da f 2π-periodisch ist gilt

$$g(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt = g(x).$$

$$\begin{aligned}
g_n &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx}dx \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\int_0^x f(t)dt \big) e^{-inx}dx \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \Big[\big(\int_0^x f(t)dt \big) \cdot \tfrac{i}{n} e^{-inx} \Big]_{-\pi}^{\pi} - \tfrac{1}{2\pi} \tfrac{i}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\
&\qquad \text{(partielle Integration: } u = \int_0^x f(t)dt,\ v' = e^{-inx}) \\
&= -\tfrac{i}{n} \cdot c_n \qquad (g(\pi) = g(-\pi)).
\end{aligned}$$

$$g_0 = \int_0^{2\pi} g(t)dt = -\tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, x\, dx$$

Aufgabe G6 (komplexe Fourier-Reihe)

i) Wie hängen die Koeffizienten der Fourier-Reihe von

$$g(x) := f(x - \tau)$$

von denen der Fourier-Reihe von f ab?

ii) Wie hängen die Koeffizienten der Fourier-Reihe von

$$h(x) := f(lx), \quad l \in \mathbb{N}$$

von denen der Fourier-Reihe von f ab?

Lösung:

i)

$$\begin{aligned}
\hat{g}_n &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx}dx \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-\tau)e^{-inx}dx \\
&\text{(substituiere } t = x - \tau) \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi-\tau}^{\pi-\tau} f(t)e^{-in(t+\tau)}dt \\
&= e^{-in\tau} \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-in(t+\tau)}dt \\
&= e^{-in\tau} \hat{f}_n
\end{aligned}$$

ii)

$$
\begin{aligned}
\hat{h}_n &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)e^{-inx}dx = \tfrac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} h(x)e^{-inx}dx \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(lx)e^{-inx}dx \quad \text{(Verschiebung des Integrationaintervals)} \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int_{0}^{l2\pi} f(y)\frac{1}{l}e^{-i\frac{n}{l}y}dy \quad \text{(Substitution)} \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{l-1}\int_{2m\pi}^{2(m+1)\pi} f(y)\frac{1}{l}e^{-i\frac{n}{l}y}dy \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{l-1}\int_{0}^{2\pi} f(y)\frac{1}{l}e^{-i\frac{n}{l}(y+2m\pi)}dy \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(y)\frac{1}{l}e^{-i\frac{n}{l}y}dy\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i\frac{n}{l}2\pi m} \quad \text{(gemetrische Reihe)} \\
&= \frac{1-e^{-i\frac{n}{l}2l\pi}}{1-e^{-i\frac{n}{l}2\pi}}
\end{aligned}
$$

Wenn n kein Vielfaches von l ist, ist der Nenner von 0 verschieden und der Zähler 0. Ist n ein Vielfaches von l so gilt $\sum_{m=0}^{l-1} e^{-i\frac{n}{l}2\pi m} = l$ und damit $\hat{h}_n = \hat{f}_n$. Die Fourier-Reihe ist

$$F_h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{h}_{nl}e^{-inlx}.$$